



# Computer-Algebra-System

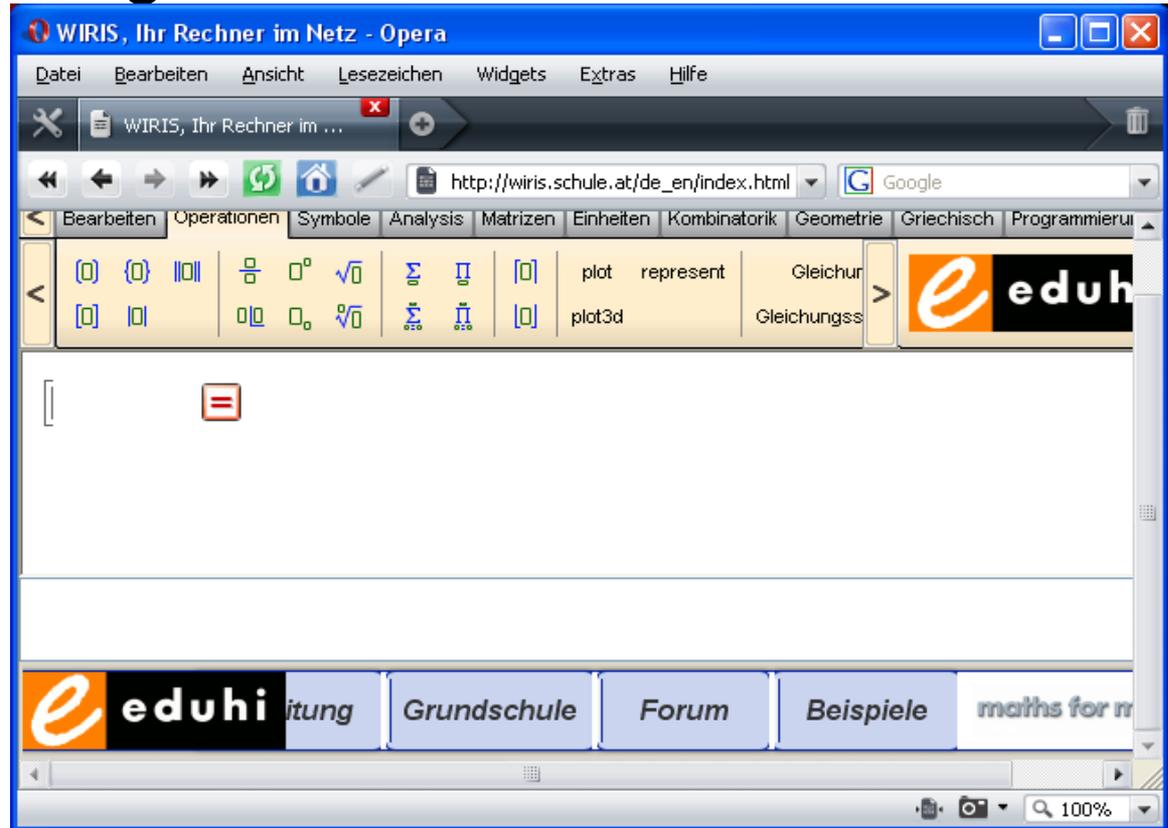
Eine Einführung in die  
Grundbedienung

# Was kann ein CAS?

- Terme berechnen
- Terme umformen
- Gleichungen lösen
- Gleichungssysteme lösen
- Funktionen berechnen und zeichnen
- Integral- und Differentialrechnung
- u.v.a.m.

# Voraussetzungen

- Computer
- Internetverbindung
- Browser
- Java



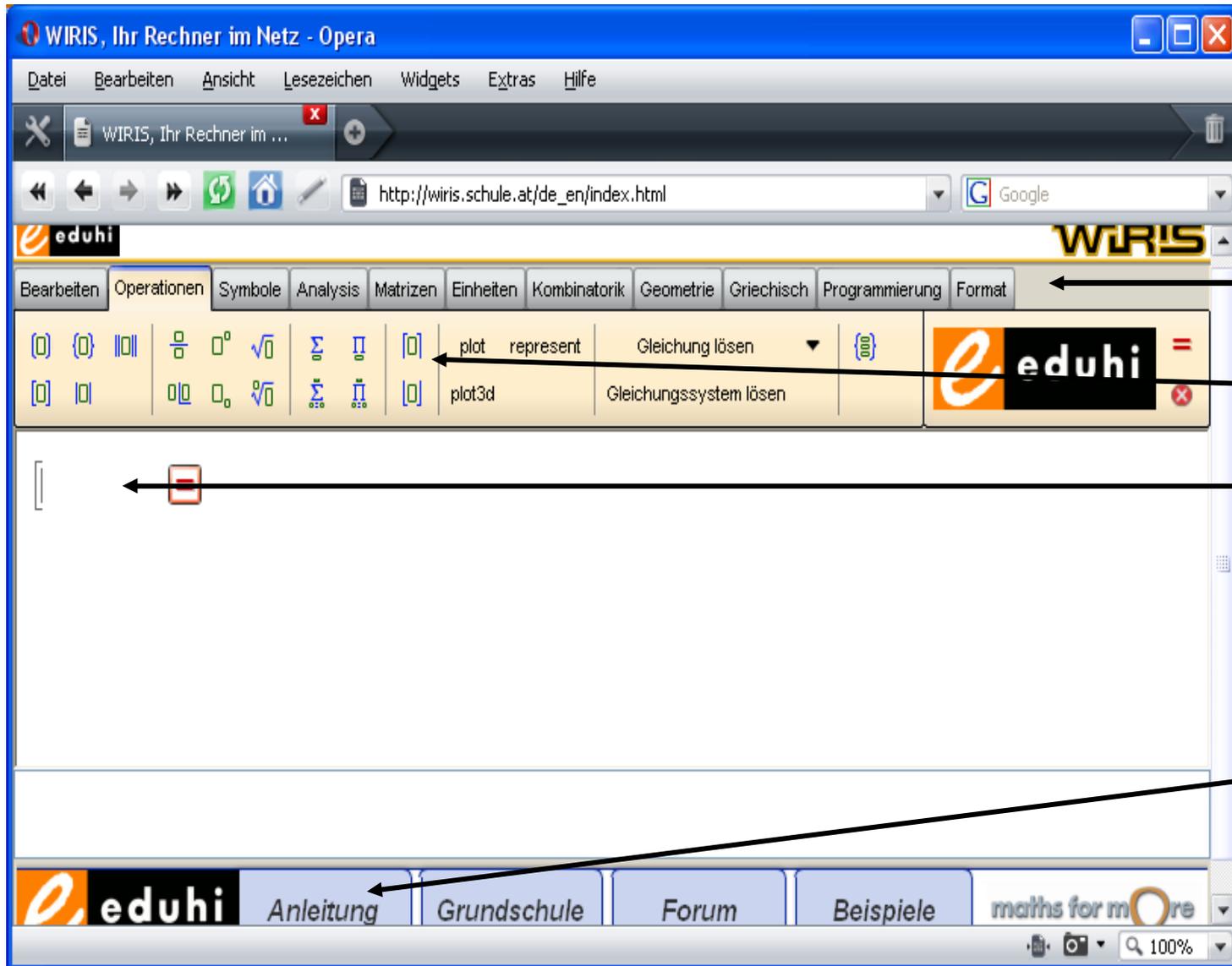
# Start von Wiris

- <http://www.Erzgebirgskolleg.de>
- -> Links
- -> Wissen
- -> WiRiS
- (daneben der Link zu Materialien)

oder:

<http://wiris.schule.at>

# Startbildschirm



Menüleiste

Befehle

Eingabebereich

Hilfe

# Eingaben

Viele Befehle sind mit Symbolbuttons in den Menüs zu bedienen oder aber durch die Eingabe von Befehlsnamen z.B.: plot(f)

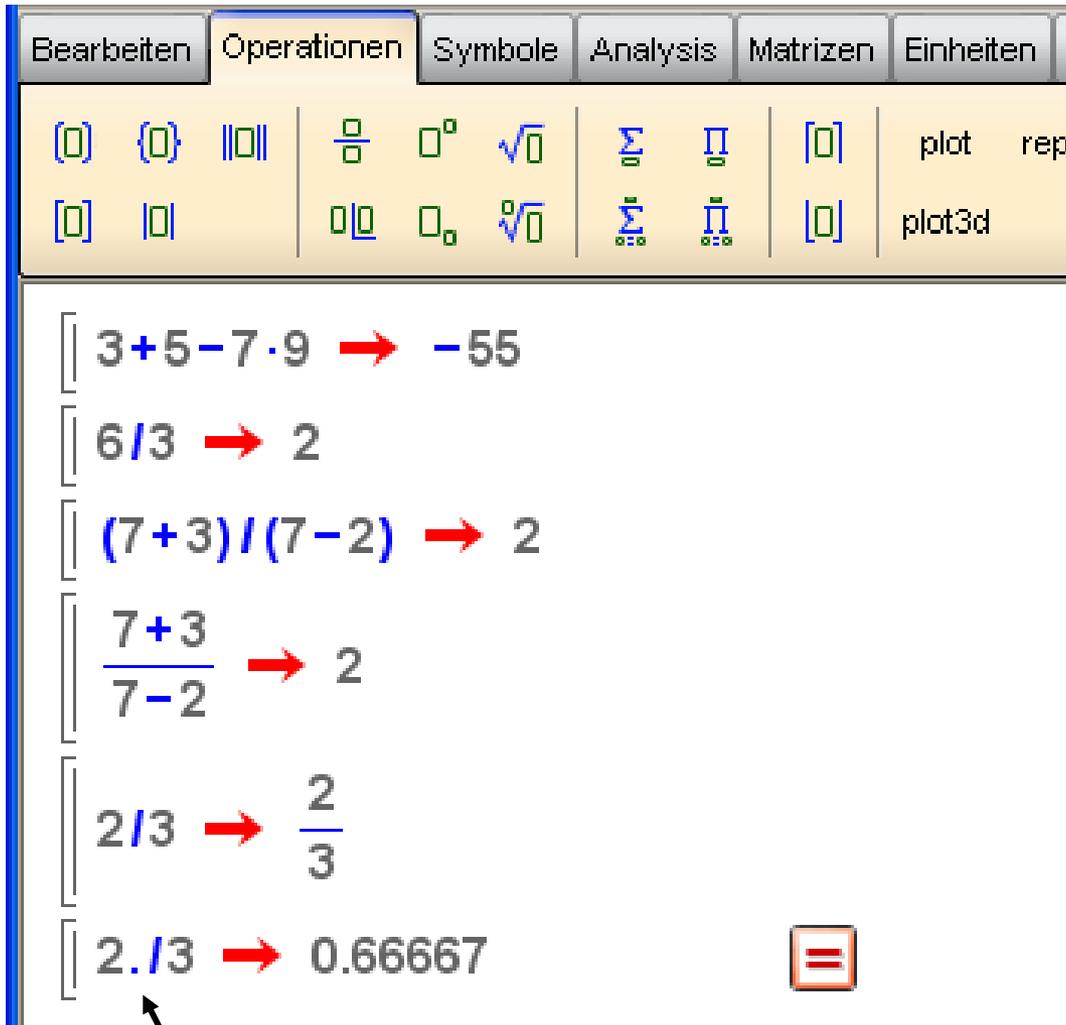
The screenshot shows a software interface with a menu bar at the top containing: < Bearbeiten Operationen Symbole Analysis Matrizen Einheiten Kombinatorik Geometrie. Below the menu bar is a toolbar with two rows of icons. The first row is labeled '2D' and the second row is labeled '3D'. The '3D' row includes a '3D' icon. To the right of the toolbar, the text 'plot' and 'plot3d' are visible. Below the toolbar is a command input area with a vertical line on the left. The text 'f(x)=2·x+3;' is entered in the first line, and 'plot(f)' is entered in the second line. To the right of the input area is a red square button with a white equals sign. Below the input area is a blue button with a white 'i' icon and the text 'Berechnen'.

# Erste Schritte in WIRIS – WIRIS als Rechenknecht

- Solange man nach Eingabe von Befehlen ENTER betätigt, beginnt eine neue Zeile und man bleibt innerhalb eines Blocks (eckige Klammer am linken Rand).
- Alle Befehle in einem Block werden durch Betätigen des gemeinsam ausgeführt und ein neuer Block beginnt.
- Rote Pfeile kennzeichnen die Ausführung der Befehle.
- Ein Semikolon am Ende einer Zeile unterdrückt die Ausgabe der Berechnungen.



# Termberechnungen



The screenshot shows a calculator interface with a menu bar at the top containing 'Bearbeiten', 'Operationen', 'Symbole', 'Analysis', 'Matrizen', and 'Einheiten'. Below the menu bar is a toolbar with various mathematical symbols and functions. The main display area shows several calculations:

- $3 + 5 - 7 \cdot 9 \rightarrow -55$
- $6 / 3 \rightarrow 2$
- $(7 + 3) / (7 - 2) \rightarrow 2$
- $\frac{7 + 3}{7 - 2} \rightarrow 2$
- $2 / 3 \rightarrow \frac{2}{3}$
- $2 . 13 \rightarrow 0.66667$

An equals sign icon is located below the last calculation. An arrow points from the text below to the decimal point in the last calculation.

**+ / - und \***

**Division**

**wie beim GTR**

**oder als Bruch**

**Ergebnis als Bruch**

**oder als Dezimalzahl**

**Der . bewirkt die Ausgabe als Dezimalzahl!**



# Termberechnungen

## Berechnung von Winkelfunktionswerten

The screenshot shows a software interface with a menu bar containing: Bearbeiten, Operationen, Symbole, Analysis, Matrizen, Einheiten, Kombinatorik, Geometrie, Griechisch, Programmi.

The 'Einheiten' menu is open, displaying a grid of units. The first row includes: m, g, s, A,  $^{\circ}$ ,  $'$ , h, s, l, Hz, W, C,  $\Omega$ , S, b, T, lm, Bq, kat,  $^2$ . The second row includes: K, mol, cd, rad,  $''$ , min, sr, N, Pa, J, V, F, Wb, H, lx, Gy, Sv,  $^3$ .

Below the menu, two calculations are shown:

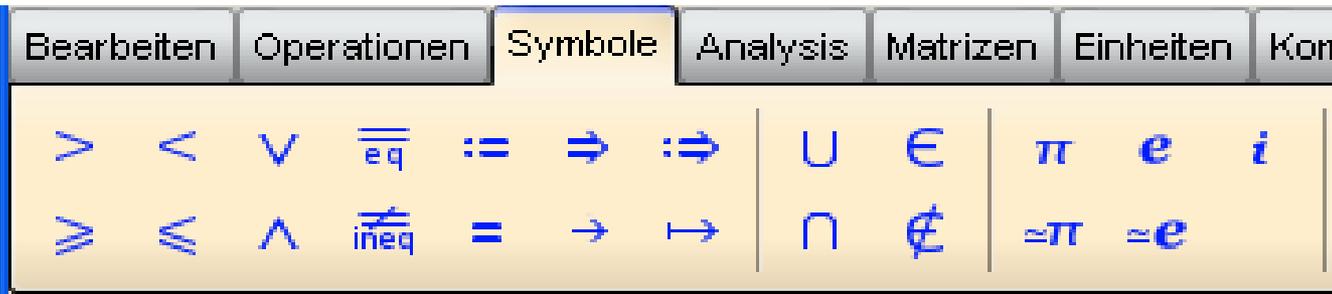
- $\sin(90) \rightarrow 0.894$  (labeled as **Bogenmaß**)
- $\sin(90^{\circ}) \rightarrow 1$  (labeled as **Gradmaß**)

Arrows indicate that the  $^{\circ}$  unit in the menu corresponds to the  $\sin(90^{\circ})$  calculation, and the 'rad' unit corresponds to the  $\sin(90)$  calculation.

**Gradmaß** (unter „Einheiten“ hinzufügen)

# Termberechnungen

## Berechnungen mit Konstanten ( $\pi$ / $e$ )



$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 1$$

$$3 \cdot \pi \rightarrow 3 \cdot \pi$$

$$3 \cdot \text{pi\_} \rightarrow 9.4248$$

$$e^2 \rightarrow e^2$$

$$e\_2 \rightarrow 7.3891$$

**WiRiS unterscheidet zwischen der Konstanten und dem Zahlenwert!**

**Will man den numerischen Wert verwenden, muss man die unteren Symbole benutzen, bzw. pi\_ oder e\_ eingeben.**

# Termberechnungen

## Berechnungen von Logarithmen

$\log 100 \rightarrow 2$	Der dekadische Logarithmus (Basis 10)
$\ln e \rightarrow 1$	Der natürliche Logarithmus (Basis e)
$\log_{10} 100 \rightarrow 2$	Der dekadische etwas (2. Möglichkeit)
$\log_2 256 \rightarrow 8$	Der duale Logarithmus (Basis 2)
$\log_2 256 \rightarrow 8.$	Die Eingabe beliebiger Logarithmen erfolgt über die Schaltfläche zum Tiefstellen (Unterer Index) im „Operationen“-Menü
$\log_7 49 \rightarrow 2.$	
$\log_{\pi} 3456.98 \rightarrow 7.118$	

# üben, üben, üben

- Berechnen Sie Termwerte!
- Beachten Sie die Eingabeschritte!
- Benutzen Sie die Menüs!
- Schauen Sie ggf. in die Hilfe (Anleitung)!
  
- Stellen Sie Fragen!

**Ermitteln Sie wie man mit WiRiS Einheiten umrechnen kann!**

$$\text{convert}\left(3.6 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 10 \text{ s}\right) \rightarrow 10. \text{ m}$$

# Termumformungen

- Addition / Subtraktion von Termen

$$\left[ 3x + 5x - 4x \rightarrow 4 \cdot x \right]$$

$$\left[ a \cdot x + a \cdot x \rightarrow 2 \cdot a \cdot x \right]$$

$$\left[ (a+2) \cdot x + (a-6) \cdot x \rightarrow 2 \cdot a \cdot x - 4 \cdot x \right]$$

$$\left[ 3z + 5z - 8z \right] \rightarrow 0$$



# Termumformungen

- Multiplikation von Termen

$$\left[ (x+1) \cdot (x-1) \rightarrow x^2 - 1 \right]$$

$$\left[ (2x+5) \cdot (3x-7) \rightarrow 6 \cdot x^2 + x - 35 \right]$$

$$\left[ (x+a) \cdot (x+a) \rightarrow a^2 + 2 \cdot a \cdot x + x^2 \right]$$

$$\left[ (x+z)^3 \rightarrow x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot z + 3 \cdot x \cdot z^2 + z^3 \right]$$



# Termumformungen

- Division von Termen

$$\left[ (x+5) / (x+5) \rightarrow 1 \right]$$

$$\left[ (2x-8) / (x-4) \rightarrow 2 \right]$$

$$\left[ (x^2 - 2x + 1) / (x - 1) \rightarrow x - 1 \right]$$

$$\left[ (a^2 - b^2) / (a + b) \rightarrow a - b \right]$$

$$\left[ (x^2 + 3x + 4) / (x + 2) \rightarrow \frac{x^2 + 3 \cdot x + 4}{x + 2} \right]$$



**Funktioniert nur gut, wenn es auch aufgeht!**

# Termumformungen

- Polynomdivision

Zuerst das Symbol für die Polynomdivision anklicken, dann die Terme eingeben!

$$\begin{array}{l}
 (x^2 + 2x + 1) \mid (x + 1) \rightarrow x^2 + 2 \cdot x + 1 \mid \begin{array}{l} x + 1 \\ x + 1 \\ \hline 0 \end{array} \\
 (x^2 + 3 \cdot x + 3) \mid (x + 1) \rightarrow x^2 + 3 \cdot x + 3 \mid \begin{array}{l} x + 1 \\ x + 2 \\ \hline 1 \end{array} \\
 (x^5 + 5 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 7) \mid (x^3 + 2 \cdot x - 3) \rightarrow x^5 + 5 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 7 \mid \begin{array}{l} x^3 + 2 \cdot x - 3 \\ x^2 + 3 \\ \hline -4 \cdot x + 2 \end{array} \begin{array}{l} \text{Ergebnis} \\ \text{Rest} \end{array}
 \end{array}$$

# Termumformungen

- Polynomdivision

$$(x^5 + 5 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 7) \mid (x^3 + 2 \cdot x - 3) \rightarrow x^5 + 5 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 7 \mid x^3 + 2 \cdot x - 3$$

$$-4 \cdot x + 2 \quad x^2 + 3$$

mathematische Schreibweise:

$$(x^5 + 5x^3 - 3x^2 + 2x - 7) : (x^3 + 2x - 3) = \underline{\underline{(x^2 + 3) + \frac{-4x + 2}{x^3 + 2x - 3}}}$$

# Termumformungen

- Polynomdivision

$$(x^5 + 5 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 7) \mid (x^3 + 2 \cdot x - 3) \rightarrow x^5 + 5 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 7 \mid \begin{array}{l} x^3 + 2 \cdot x - 3 \\ \dots \\ -4 \cdot x + 2 \end{array} \begin{array}{l} x^2 + 3 \end{array}$$

Probe:

$$\left[ \begin{array}{l} (x^5 + 5 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 7) \mid (x^3 + 2 \cdot x - 3) \rightarrow x^5 + 5 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 7 \mid \begin{array}{l} x^3 + 2 \cdot x - 3 \\ \dots \\ -4 \cdot x + 2 \end{array} \begin{array}{l} x^2 + 3 \end{array} \\ (x^2 + 3) \cdot (x^3 + 2 \cdot x - 3) + (-4x + 2) \rightarrow x^5 + 5 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 7 \mid \boxed{=} \end{array} \right.$$

stimmt!

# Termumformungen

- Faktorisieren von Summen

**Befehl: factor**

$$\left[ \text{factor}(a^2 - 9) \rightarrow (a - 3) \cdot (a + 3) \right]$$

$$\left[ \text{factor}(a^2 - 2a \cdot b + b^2) \rightarrow (a - b)^2 \right]$$

$$\left[ \text{factor}(x^5 + x^4 - 13 \cdot x^3 - 13 \cdot x^2 + 36 \cdot x + 36) \rightarrow (x - 3) \cdot (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) \right]$$

$$\left[ \text{factor}(x^2 - 3x + 5) \right] \rightarrow x^2 - 3 \cdot x + 5 \quad \boxed{=}$$

**Führt natürlich nur zum Erfolg, wenn es auch eine Zerlegung in Faktoren gibt!**

... übrigens, für die Primfaktorenzerlegung:

$$\text{factor}(5760) \rightarrow 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5$$

# Termumformungen

- Was mit Termen u.a. nicht sofort geht

$$\left[ \sqrt{(x+1)^2} \rightarrow \sqrt{x^2 + 2 \cdot x + 1} \right]$$

leider nicht  $(x+1)$

$$\left[ x^{a+2} \cdot x^{a+5} \rightarrow x^{a+2} \cdot x^{a+5} \right]$$

und leider nicht  $x^{2a+7}$

$$\left[ (2^a \cdot 2^b) \rightarrow 2^a \cdot 2^b \right]$$

und leider nicht  $2^{a+b}$

$$\left[ a^2 \cdot b^2 \rightarrow a^2 \cdot b^2 \right]$$

und leider nicht  $(ab)^2$

$$\left[ \frac{3x+1}{x+2} \rightarrow \frac{3 \cdot x+1}{x+2} \right]$$

leider keine Polynomdivision

$$\left[ \text{factor } (8^2 \cdot 8^3) \rightarrow 2^{15} \right]$$



leider keine Basis 8 mehr, also  $8^5$



# Computer-Algebra-System

... und trotzdem müssen Sie noch selber denken – der Computer kann nur das ausrechnen, was Sie im eingeben!

# Lösen von Gleichungen

- Lösen linearer Gleichungen

**solve**  $(3x+5=8)$   $\rightarrow$   $\{\{x=1\}\}$

eine Lösung

**solve**  $(3x+5=3x+5)$   $\rightarrow$   $\{\{x=x\}\}$

unendlich viele  
Lösungen  $\{x; x \in \mathbb{R}\}$

**solve**  $(3x+5=3x-5)$   $\rightarrow$   $\{\{\}\}$

keine Lösung

# Lösen von Gleichungen

- Lösen linearer Gleichungen

$$\text{solve } (3x+5=a) \rightarrow \{\{a=3 \cdot x+5, x=x\}\}$$

Hmm ...

$$\text{solve } (3x+5=a, x) \rightarrow \left\{ \left[ x = \frac{1}{3} \cdot a - \frac{5}{3} \right] \right\}$$

eine Lösung für x

$$\text{solve } (3x+5=a, a) \rightarrow \{\{a=3 \cdot x+5\}\}$$

eine Lösung für a

$$\text{solve } (3x+a=3x+a, x) \rightarrow \{\{x=x\}\}$$

unendlich viele

Lösungen  $\{x; x \in \mathbb{R}\}$

$$\text{solve } (3x+a=3x+b) \rightarrow \{\{a=b, b=b, x=x\}\}$$

Wenn  $a=b$  ist gibt es für beliebige b unendlich viele Lösungen für x

# Lösen von Gleichungen

- Lösen quadratischer Gleichungen

<code>solve (x<sup>2</sup> + 4x + 4 = 0)</code>	$\rightarrow$	<code>{{x = -2}}</code>	eine Lösung
<code>solve (x<sup>2</sup> - 4x + 4 = 0)</code>	$\rightarrow$	<code>{{x = 2}}</code>	eine Lösung
<code>solve (x<sup>2</sup> - 4x - 5 = 0)</code>	$\rightarrow$	<code>{{x = -1}, {x = 5}}</code>	zwei Lösungen
<code>solve (x<sup>2</sup> + 2x + 4 = 0)</code>	$\rightarrow$	<code>{}</code>	keine Lösung

# Lösen von Gleichungen

- Lösen quadratischer Gleichungen

$$\text{solve } (x^2 + 4 \cdot x + a = 0, x) \rightarrow \{ \{x = -\sqrt{-a+4} - 2\}, \{x = \sqrt{-a+4} - 2\} \}$$

$$\text{solve } (x^2 + p \cdot x + q = 0, x) \rightarrow \left\{ \left[ x = \frac{\sqrt{p^2 - 4 \cdot q}}{2} - \frac{p}{2} \right], \left[ x = -\frac{\sqrt{p^2 - 4 \cdot q}}{2} - \frac{p}{2} \right] \right\}$$

$$\text{solve } (a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0, x)$$

$$\rightarrow \left\{ \left[ x = -\frac{\sqrt{-4 \cdot a \cdot c + b^2}}{2 \cdot a} + \frac{-b}{2 \cdot a} \right], \left[ x = \frac{\sqrt{-4 \cdot a \cdot c + b^2}}{2 \cdot a} + \frac{-b}{2 \cdot a} \right] \right\}$$

# Lösen von Gleichungen

- Lösen beliebiger Gleichungen

$$\left[ \text{solve } (x^3 + 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 4 = 0) \rightarrow \{ \{x = -3.7511\} \} \right]$$

$$\left[ \text{solve } (\sin(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}) \rightarrow \left\{ \left[ x = \frac{\pi}{4} \right], \left[ x = \frac{3 \cdot \pi}{4} \right] \right\} \right]$$

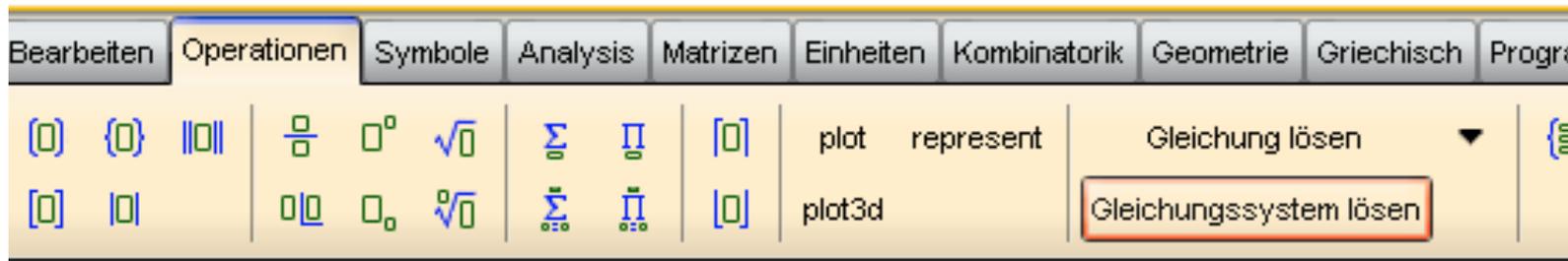
$$\left[ \text{solve } (3^x = 12, x) \rightarrow \{ \{x = 2.2619\} \} \right]$$

$$\left[ \text{solve}(\log_3(x-1) + \log_3 12 - 3 \cdot (\log_3 2) = 0, x) \rightarrow \{ \{x = 1.6667\} \} \right]$$

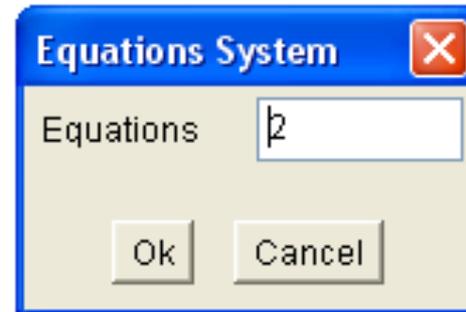
Man muss denken – dann klappts auch mit WiRiS!

# Lösen von Gleichungssystemen

- Lösen linearer Gleichungssysteme



ausfüllen



anklicken

Anzahl  
eingeben

# Lösen von Gleichungssystemen

- Lösen linearer Gleichungssysteme

$$\left[ \text{solve} \begin{cases} 3x+2y=2 \\ 2x+4y=3 \end{cases} \rightarrow \left\{ \left[ x = \frac{1}{4}, y = \frac{5}{8} \right] \right\} \quad \text{eine Lösung} \right.$$

$$\left[ \text{solve} \begin{cases} 3x+2y=2 \\ 3x+2y=2 \end{cases} \rightarrow \left\{ \left[ x = -\frac{2}{3} \cdot y + \frac{2}{3}, y = y \right] \right\} \quad \text{unendlich viele} \right.$$

Lösungen

$$\left[ \text{solve} \begin{cases} 3x+2y=2 \\ 3x+2y=5 \end{cases} \rightarrow \{ \} \quad \text{keine Lösung} \right.$$

# Lösen von Gleichungssystemen

- Lösen linearer Gleichungssysteme

$$\text{solve} \left\{ \begin{array}{l} 3a + 4b + 5c + 6d = 4 \\ 2a - 4b + 5c - 4d = 2 \\ 4a + 3c + d = -2b + 1 \\ -2a - b - c + 2d = -4 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \left\{ a = -\frac{148}{65}, b = \frac{548}{195}, c = \frac{82}{39}, d = -\frac{71}{39} \right\} \right\}$$
  

$$\text{solve} \left\{ \begin{array}{l} 3a + 4b + z \cdot c + 6d = 4 \\ 2a - 4b + 5c - 4d = 2 \\ 4a + 3c + d = -2b + 1 \\ -2a - b - c + 2d = -4 \end{array} \right\}$$
  

$$\rightarrow \left\{ \left\{ a = \frac{6 \cdot z - 474}{50 \cdot z - 55}, b = \frac{48 \cdot z + 308}{50 \cdot z - 55}, c = \frac{82}{10 \cdot z - 11}, d = \frac{-14 \cdot z - 1}{10 \cdot z - 11}, z = z \right\} \right\}$$

Für letzteren Fall sollte der zusätzliche Parameter weiter hinten im Alphabet kommen!

# Probe!

- Vertrauen Sie niemanden!

$$\text{solve} \left[ \begin{array}{l} 3a+4b+5c+6d=4 \\ 2a-4b+5c-4d=2 \\ 4a+3c+d=-2b+1 \\ -2a-b-c+2d=-4 \end{array} \right] \rightarrow \left\{ \left[ a = -\frac{148}{65}, b = \frac{548}{195}, c = \frac{82}{39}, d = -\frac{71}{39} \right] \right\}$$

$$a = -\frac{148}{65} \rightarrow -\frac{148}{65}$$

$$b = \frac{548}{195} \rightarrow \frac{548}{195}$$

$$c = \frac{82}{39} \rightarrow \frac{82}{39}$$

$$d = -\frac{71}{39} \rightarrow -\frac{71}{39}$$

den Variablen Werte zuweisen!

$$3a+4b+5c+6d=4?$$

$$2a-4b+5c-4d=2?$$

$$4a+3c+d=-2b+1?$$

$$-2a-b-c+2d=-4?$$

$\rightarrow$  true

mit dem ? Prüfen, ob die Aussage wahr ist

# Probe!

- Vertrauen Sie niemanden!

`solve(2 · x2 + 2 · x - 12 = 0) → {{x = -3}, {x = 2}}`

`x = -3 → -3`      den Variablen Werte zuweisen!

`2 · x2 + 2 · x - 12 = 0? → true`

`x = 2 → 2`

`2 · x2 + 2 · x - 12 = 0? → true`

mit dem **?** Prüfen, ob die Aussage wahr ist

# Grenzen

- Vergessen Sie niemals selbst zu denken!

$$\text{solve}(s = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v \cdot t, a) \rightarrow \left\{ \left\{ a = \frac{2}{t^2} \cdot s + \frac{-2}{t} \cdot v \right\} \right\}$$

$$t=4 \rightarrow 4$$

$$s=63 \rightarrow 63$$

$$v=13.889 \rightarrow 13.889$$

Lösung : ;

$$a = \left( \frac{2}{t^2} \cdot s + \frac{-2}{t} \cdot v \right) \rightarrow 0.9305$$

# Funktionen

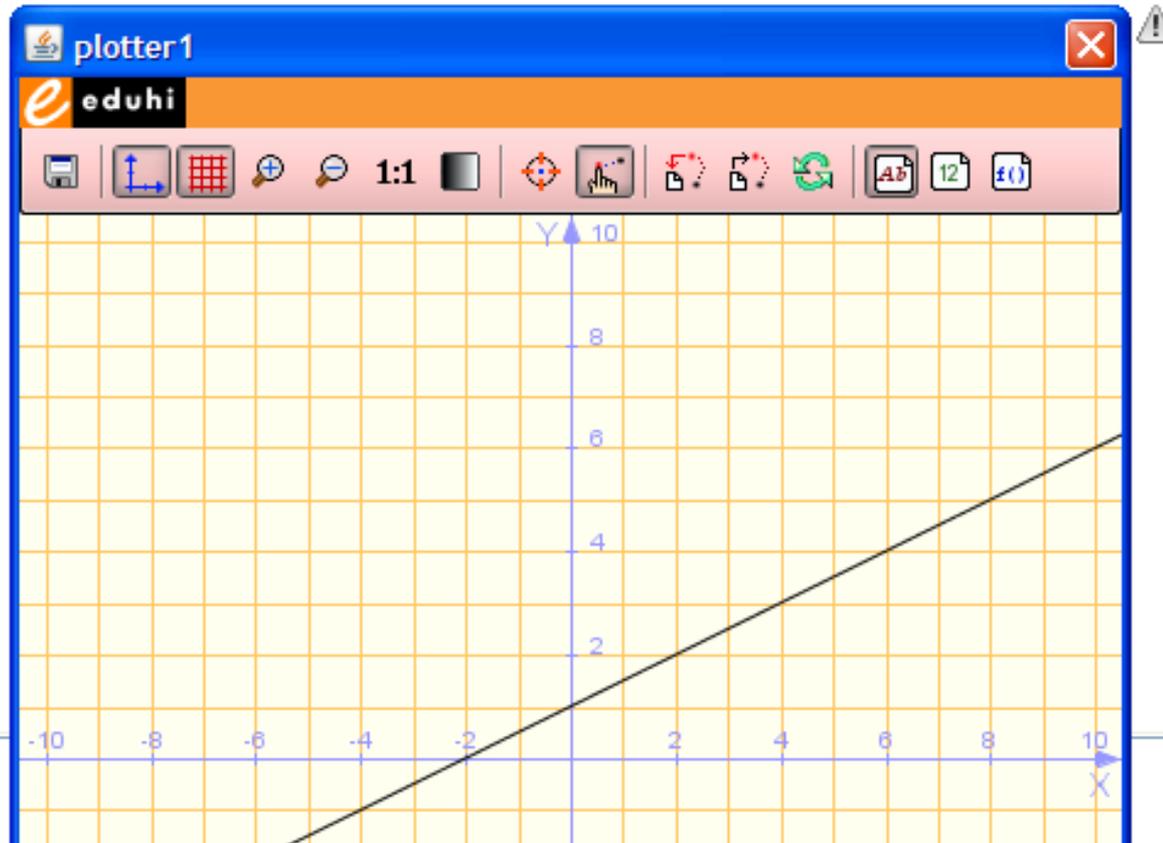
- Zeichnen von Funktionen

The screenshot shows a software interface for plotting functions. The main window displays a coordinate system with a grid. The x-axis ranges from -10 to 10, and the y-axis ranges from 0 to 10. A parabola is plotted, representing the function  $f(x) = x^2$ . The vertex of the parabola is at the origin (0,0). The plotter window is titled 'plotter1' and shows the function definition  $f=x^2$  and the plot command  $\text{plot}(f)$ . The plotter window also has a toolbar with various icons for zooming, panning, and other plot controls.

# Funktionen

- Das Koordinatensystem

```
plotter1=plotter({axis_style="arrow_XY"}) → plotter1  
f=1/2x+1 → 1/2·x+1  
plot(f) → plotter1
```



# Funktionen

- Vereinbaren und Zeichnen mehrere Fnk's

```
plotter1=plotter({axis_style="arrow_XY"}) → plotter1
```

```
f=sin(x) → sin(x)
```

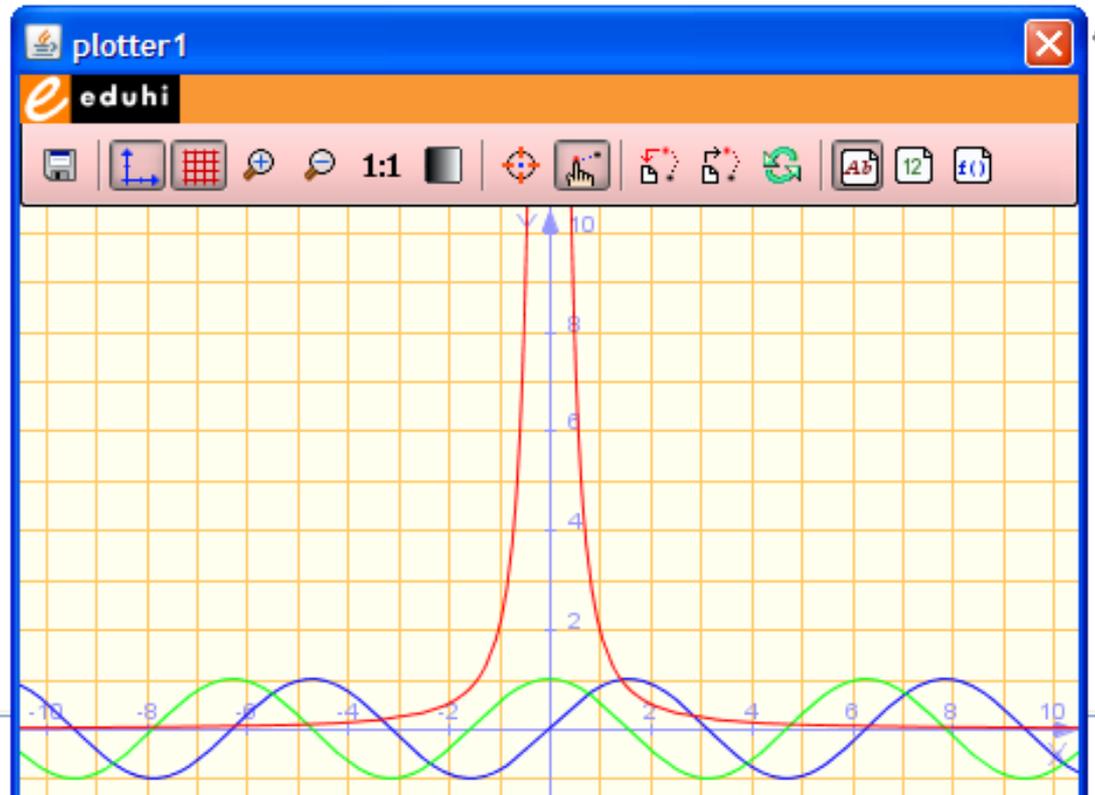
```
g=cos(x) → cos(x)
```

```
h= $\frac{2}{x^2}$  →  $\frac{2}{x^2}$ 
```

```
plot(f,{color=blue}) → plotter1
```

```
plot(g,{color=green}) → plotter1
```

```
plot(h,{color=red}) → plotter1
```



# Funktionen

- Verändern des Anzeigebereiches

`ploter1=plotter(( point(0,0),105,11),{axis_style="arrow_XY"})`

Mittelpunkt, Gesamtbreite, -höhe

Höhe: 11 – d.h. von [- 5,5 ; 5,5]

The plot window shows a coordinate system with a grid. The X-axis ranges from -60 to 50, and the Y-axis ranges from -5 to 5. The plot area is centered at (0,0) and has a width of 105 and a height of 11.

# Funktionen

- Kurvendiskussion:
  - DB
  - WB
  - Nst.
  - Y-Sst.
  - Extrema
  - Monotonie
  - Symmetrie
  - Verhalten im Unendlichen
  - Polstellen
  - Wendestellen

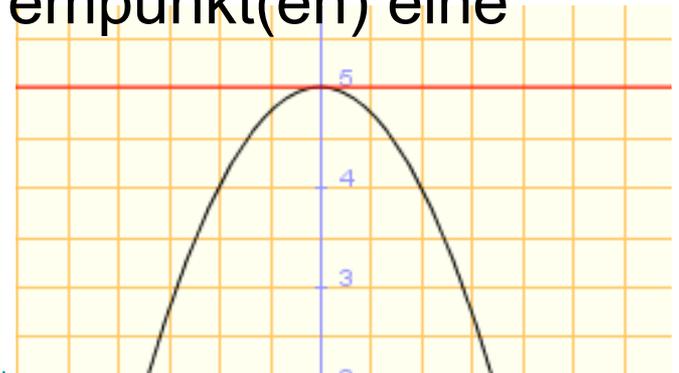
# Funktionen

- Kurvendiskussion:
  - DB: Menge aller Argumente, für die die Fnk. definiert ist
  - WB: Menge aller Funktionswerte, die die Fnk. annimmt
  - Nst.: Argumente, für die Fnk. den Wert  $y = 0$  annimmt  $f(x_0) = 0$
  - Y-Sst.: Funktionswert, den die Fnk. für das Argument  $x = 0$  annimmt  $y = f(0)$

# Funktionen

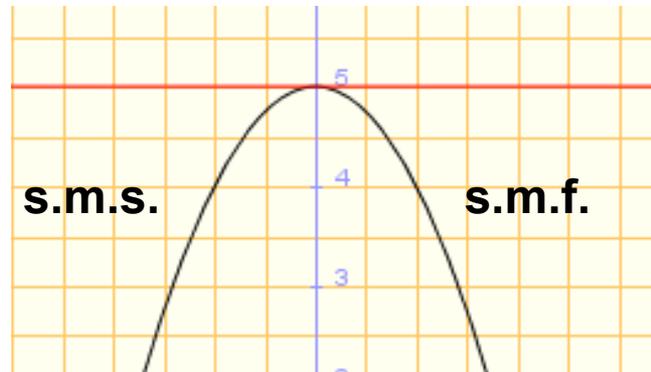
- Kurvendiskussion:
  - Extrema:
    - Maximum: Punkt mit dem in der Umgebung größten Funktionswert
    - Minimum: Punkt mit dem in der Umgebung kleinsten Funktionswert

Die Funktion hat an dem (den) Extrempunkt(en) eine waagerechte Tangente, d.h. ihr „Anstieg“ ist 0!



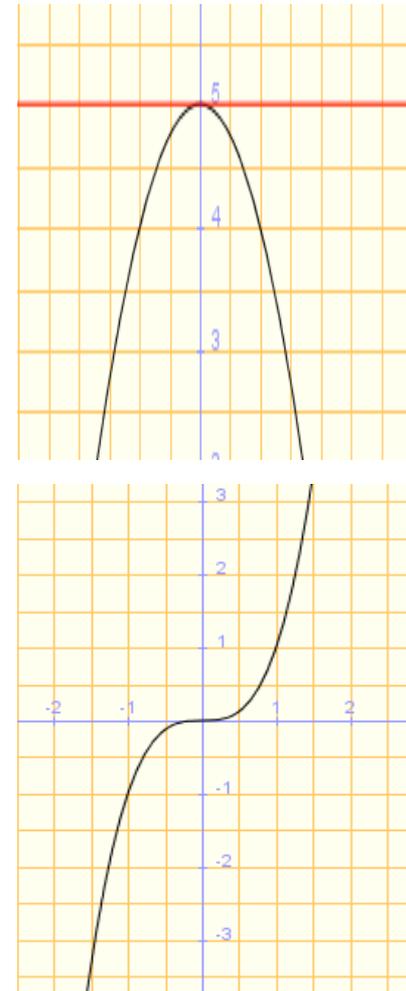
# Funktionen

- Kurvendiskussion:
  - Monotonie:
    - mon. wachsend (steigend):  
der Anstieg ist  $\geq 0$  (streng:  $>0$ )
    - mon. fallend :  
der Anstieg ist  $\leq 0$  (streng:  $<0$ )



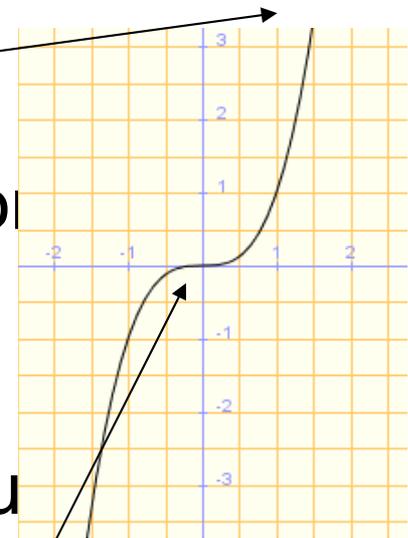
# Funktionen

- Kurvendiskussion:
  - Symmetrie:
    - axialsymmetrisch (zur y-Achse):  
 $f(x) = f(-x)$
    - Punktsymmetrisch (zum Ursprung)  
 $f(x) = -f(-x)$  oder  $-f(x) = f(-x)$



# Funktionen

- Kurvendiskussion:
  - Verhalten im Unendlichen  
(Wie verändert sich die Größe von  $y$  wenn  $x$  gegen Unendlich geht?)
  - Polstellen  
(treten u.U. an Lücken des DB auf)
  - Wendestellen  
(Wo ändert sich die Krümmungsrichtung der Funktion?)



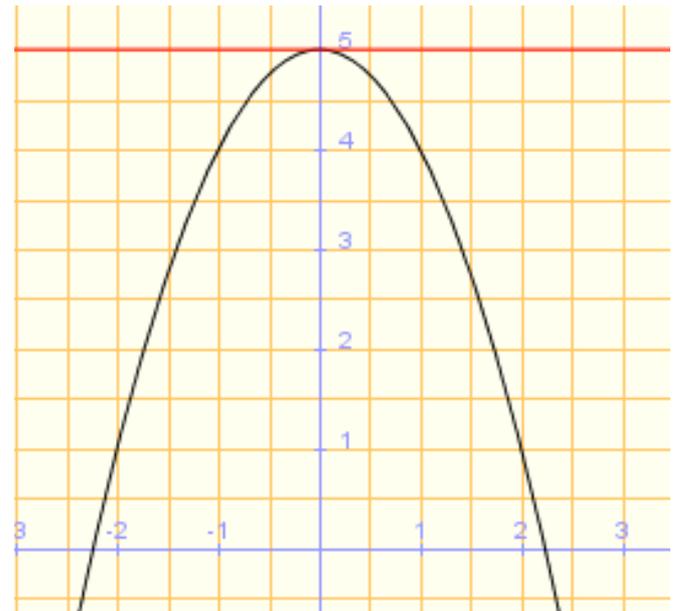
# Funktionen

- Kurvendiskussion:
  - DB: Menge aller Argumente, für die die Fnk. definiert ist
  - WB: Menge aller Funktionswerte, die die Fnk. annimmt

Zeichnen und ansehen!

DB:  $x \in \mathbb{R}$

WB:  $x \in \mathbb{R} ; x \leq 5$



# Funktionen

- Kurvendiskussion:
  - Nst.: Argumente, für die Fnk. den Wert  $y = 0$  annimmt  $f(x_0) = y = 0$

$$f(x) = 3 \cdot x^2 + 2x - 8;$$

$$\text{solve}(f(x)=0) \rightarrow \left\{ \{x = -2\}, \left[ x = \frac{4}{3} \right] \right\}$$

$$f(x) = \ln(3 \cdot x + 9);$$

$$\text{solve}(f(x)=0) \rightarrow \left\{ \left[ x = -\frac{8}{3} \right] \right\}$$

# Funktionen

- Kurvendiskussion:
  - Y-Sst.: Funktionswert, den die Fnk. für das Argument  $x = 0$  annimmt  
 $y = f(0)$

$$f(x) = \ln(3 \cdot x + 9);$$

$$f(0) \rightarrow 2.1972$$

$$f(x) = 3 \cdot x^2 + 3x - 8;$$

$$f(0) \rightarrow -8$$

# Funktionen

- Kurvendiskussion:

- Extrema:

Die Funktion hat an den Extrempunkt(en) eine waagerechte Tangente, d.h. ihr „Anstieg“ ist 0!  
(Anstieg = 1. Ableitung = Differentialquotient)

$$\tan(\alpha) = m = f'(x) \quad \mathbf{f(x) = 3 \cdot x^2 + 3x - 8 ;}$$

$$\mathbf{f(x)' \rightarrow 6 \cdot x + 3}$$

$$\mathbf{\text{solve}(f(x)'=0) \rightarrow \left\{ \left\{ x = -\frac{1}{2} \right\} \right\}}$$

$$\mathbf{f\left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow -\frac{35}{4} \quad P_{\min}(-0,5 ; -8,75)}$$

# Funktionen

- Kurvendiskussion:

- Extrema:

Für ein Maximum gilt: Die 2. Ableitung ist kleiner 0

Für ein Maximum gilt: Die 2. Ableitung ist kleiner 0

$$f(x) = 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 8;$$

$$\text{solve}(f(x)'=0) \rightarrow \left\{ \left\{ x = -\frac{1}{2} \right\} \right\}$$

$$f2(x) = f(x)'';$$

$$f2\left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow 6$$

# Funktionen

- Kurvendiskussion:
- Monotonie:
  - mon. steigend  $f'(x) \geq 0$  / mon. fallend  $f'(x) \leq 0$   
(streng – ohne Gleichheit)

$$f(x) = 3 \cdot x^2 + 3x - 8;$$

$$\text{solve\_inequation}(f(x)' \geq 0) \rightarrow x \geq -\frac{1}{2} \quad \text{m.s. für alle } x \geq -0,5$$

$$\text{solve\_inequation}(f(x)' \leq 0) \rightarrow x \leq -\frac{1}{2} \quad \text{m.f. für alle } x \leq -0,5$$

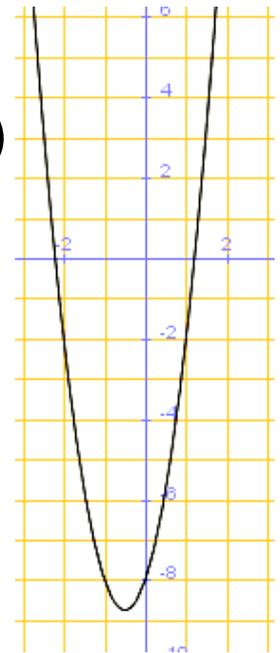
# Funktionen

- Kurvendiskussion:
  - Symmetrie:
    - axialsymmetrisch (zur y-Achse):  $f(x) = f(-x)$
    - punktsymmetrisch (zum Ursprung):  $f(x) = -f(-x)$

$$f(x) = 3 \cdot x^2 + 3x - 8;$$

$$f(x) = f(-x) ? \rightarrow \text{false}$$

$$f(x) = -f(-x) ? \rightarrow \text{false}$$



# Funktionen

- Kurvendiskussion:
  - Verhalten im Unendlichen  
Grenzwert von  $f(x)$  für  $x$  gegen  $\pm \infty$

$$f(x) = 3 \cdot x^2 + 3x - 8;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow +\infty$$

# Funktionen

- Kurvendiskussion:

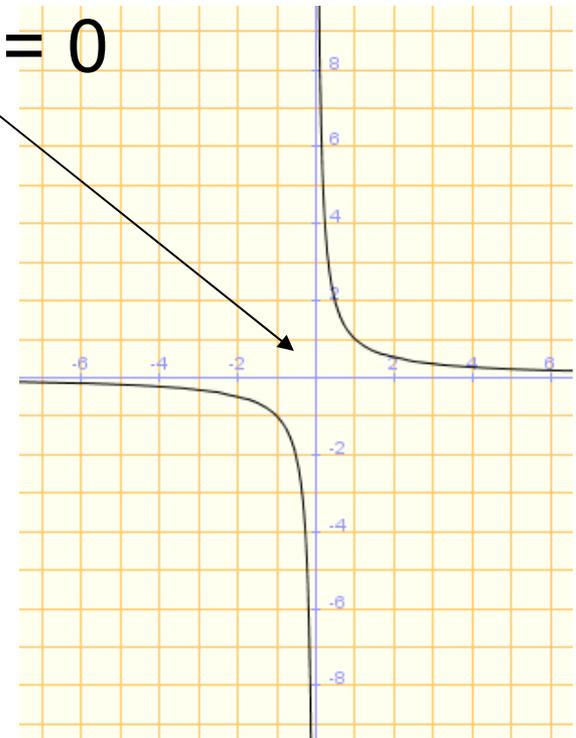
- Polstellen

Grenzwert von  $f(x)$  für  $x$  gegen  $x_P = 0$

$$f(x) = \frac{1}{x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \rightarrow -\infty$$



# Funktionen

- Kurvendiskussion:

- Wendestellen

Wo ändert sich die Krümmungsrichtung der Fnk?

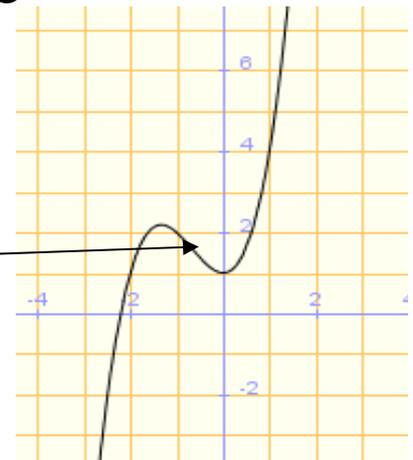
Wo ist der Anstieg der Anstiegsfunktion 0 ?

Betrachtung der 2. Ableitung  $f''(x)=0$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 1;$$

$$\text{solve}(f(x)''=0) \rightarrow \left\{ \left\{ x = -\frac{2}{3} \right\} \right\}$$

$$\text{plot}(f(x)) \rightarrow \text{plotter1}$$



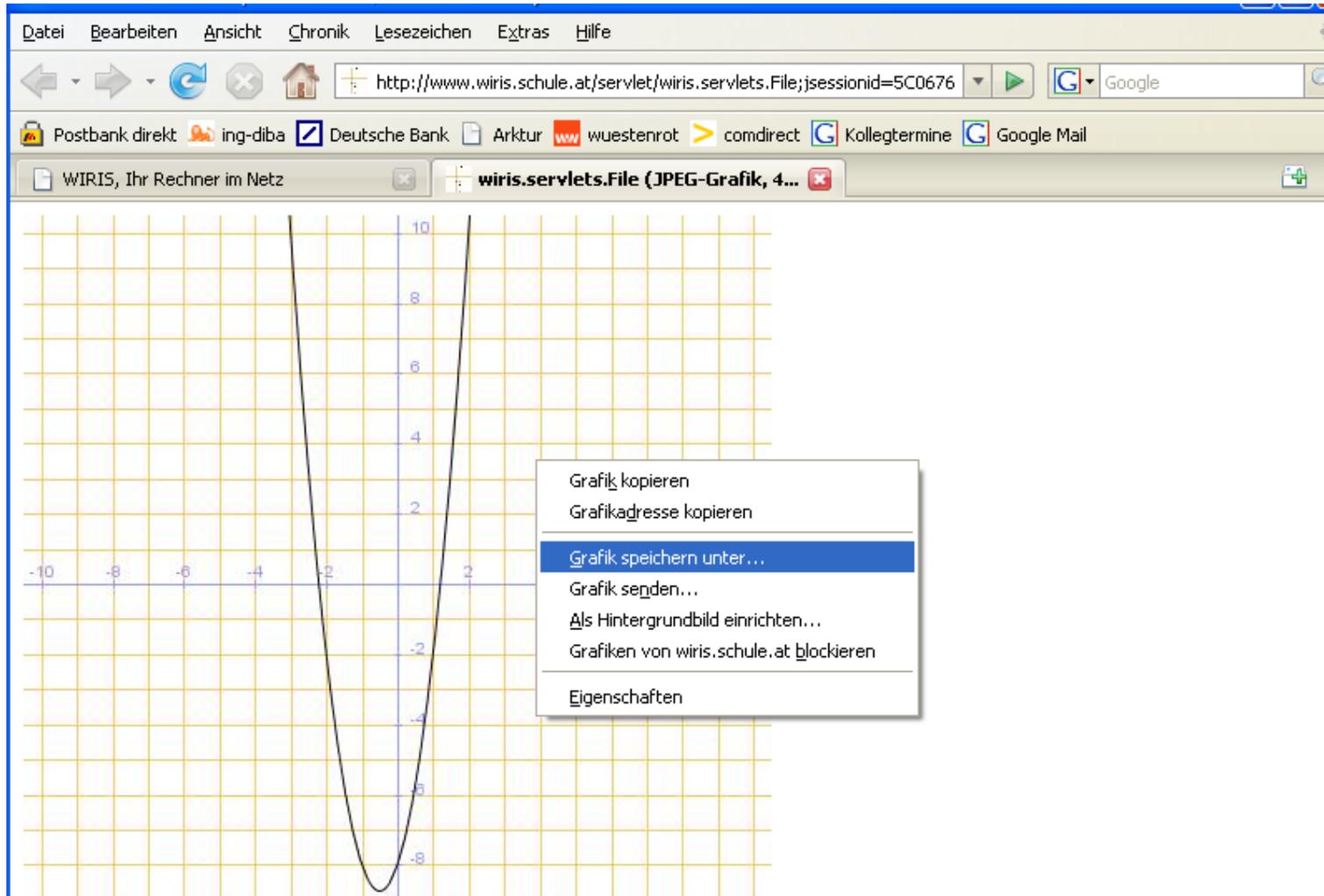
# Speichern!

- Bilder:

The screenshot shows a software interface with a menu bar (Datei, Bearbeiten, Ansicht, Chronik, Lesezeichen, Extras, Hilfe) and a toolbar. A window titled 'plotter1' displays a graph of the function  $f(x) = 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 8$ . The graph is a parabola opening upwards on a grid. A toolbar above the graph contains various icons, including a save icon (floppy disk) which is highlighted by a black arrow labeled '1.'. An 'Options' dialog box is open in the foreground, showing a 'Format' section with a list of file types: \*.jpg, \*.png, \*.pdf, and \*.ps. The \*.jpg option is selected. The 'Ok' button is highlighted by a black arrow labeled '2.'. In the background, a browser window is visible with the 'EDUCATION HIGHWAY' logo and a search bar.

# Speichern!

- Bilder:



# Speichern!

- Arbeitsblätter:

The screenshot shows a web browser window with the URL `http://www.wiris.schule.at/de_en/index.html`. The browser's address bar and tabs are visible. Below the browser, the 'wiris' software interface is shown. The toolbar includes a 'Save' icon (a floppy disk) which is highlighted with a red box and labeled '1.'. A 'Save options...' dialog box is open, showing the following options:

- Get a suitable html file to save
- Get the source code to insert in a html file
- Focus on load
- Execute on load
- Hide toolbar (labeled '2.') with a dotted selection box
- Primary

At the bottom of the dialog box, there are 'Ok' and 'Cancel' buttons. The 'Ok' button is highlighted with a red box and labeled '3.'. The main interface shows a code editor with the text:

```
f(x)=3*x^2+3*x-8;  
plot f(x) -> plotter1
```

# Speichern!

- Arbeitsblätter:

