Klausur unter abiturähnlichen Bedingungen
Grundkursfach Mathematik

- Ersttermin -

Material für die Teilnehmerin

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte) beträgt **240 Minuten**.

Teil A: Ein Teil der Aufgaben im Teil A ist **auf dem Aufgabenblatt** zu lösen.
Für die Bearbeitung der Aufgaben im Teil A sind ausschließlich folgende **Hilfsmittel** zugelassen:

- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung,
- Zeichengeräte und Zeichenhilfsmittel.

Im Teil A sind **15 BE** (Bewertungseinheiten) zu erreichen.
Alle Materialien zum Teil A werden 60 Minuten nach Arbeitsbeginn eingesammelt.
Teil B: Für die Bearbeitung der Aufgaben im Teil B sind nach dem Einsammeln von Teil A folgende **Hilfsmittel** zugelassen:

- grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner,
- Tabellen- und Formelsammlung,
- im Teil A zugelassene Hilfsmittel.

Im Teil B sind **45 BE** zu erreichen.
Geben Sie auf dem Deckblatt der Arbeit den verwendeten Typ des Taschenrechners an.
Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden. Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabedaten berechnet.

Bearbeiten Sie auch die **Rückseiten** der Blätter.

Bewertung

Name des Schülers / der Schülerin: ________________________________

Pkt	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Aufgabenteil A

Lösen Sie die folgenden Aufgaben ohne Formelsammlung und ohne Taschenrechner.
In den Aufgaben 1 bis 8 **ist jeweils genau eine Antwort richtig**. Kreuzen Sie an.

1. Welche Steigung besitzt die Tangente an den Graphen der Funktion $f(x)=\sqrt{2x}$ ($x \in \mathbf{D}_f$) an der Stelle a ihres Definitionsbereichs?

   ☐ $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2a^3}$ ☐ $\frac{2}{\sqrt{2a}}$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ ☐ $\frac{4}{\sqrt{2a}}$ ☐ $-\frac{1}{\sqrt{2a}}$

2. Bei einem Turnier mit acht Mannschaften spielt jede Mannschaft gegen jede andere ohne Rückrunde. Wie groß ist die Gesamtzahl der Spiele?

   ☐ 16 ☐ 28 ☐ 49 ☐ 56 ☐ 64

3. Welche der angegebenen Funktionen f besitzt für $x \to \infty$ den Grenzwert 4?

   ☐ $f(x)=\frac{4x^2-6}{x^3+2x}$ ☐ $f(x)=4x^2+\frac{1}{x}$ ☐ $f(x)=\frac{4x^3-2x}{2x+x^2}$ ☐ $f(x)=\frac{-8x+1}{4-2x}$ ☐ $f(x)=\frac{4}{x}-4$

4. Für welchen Wert m sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix} m \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix} -m \\ 2 \\ 4m \end{pmatrix}$ orthogonal zueinander?

   ☐ m = -6 ☐ m = 2 ☐ m_1 = -2, m_2 = 6 ☐ m_1 = 2, m_2 = 6 ☐ m = 6

5. Der Wert des bestimmten Integrals $\int_0^2 \left(-2x^3\right) dx$ beträgt:

   ☐ 8 ☐ -8 ☐ 4 ☐ -4 ☐ -16

6. Die dargestellte Ebene besitzt NICHT die Gleichung:

   ☐ $4x+5y=20$

   ☐ $12x+15y-60=0$

   ☐ $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1$

   ☐ $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\left[\vec{x}-\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]=0$

   ☐ $\vec{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

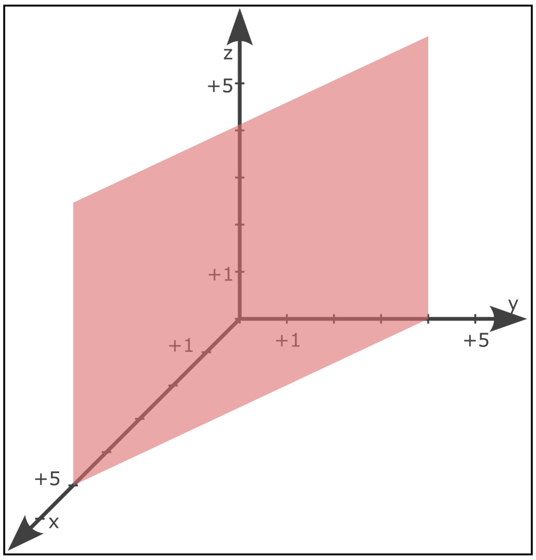


Abbildung 1: Ebene

7. Ein Tetraeder ist mit den Zahlen 1 bis 4 beschriftet und wird 1200mal geworfen. Es interessiert die Zufallsgröße X: Anzahl der Einsen.
Wie groß sind Erwartungswert μ und Standardabweichung σ?

▢	▢	▢	▢	▢
$\mu = 300$ $\sigma = 20$	$\mu = 300$ $\sigma = 15$	$\mu = 300$ $\sigma = 225$	$\mu = 400$ $\sigma = 225$	$\mu = 400$ $\sigma = 15$

8. Dargestellt sind die 1. und 2. Ableitung einer ganzrationalen Funktion f.
Welche der nachfolgenden Eigenschaften trifft NICHT für f zu?
- ▢ f ist achsensymmetrisch.
- ▢ f besitzt höchstens drei Nullstellen.
- ▢ Der Tiefpunkt liegt bei $x = 2$.
- ▢ Die Wendestelle liegt bei $x = 0$.
- ▢ Für $x > 2$ ist die Funktion f monoton steigend.

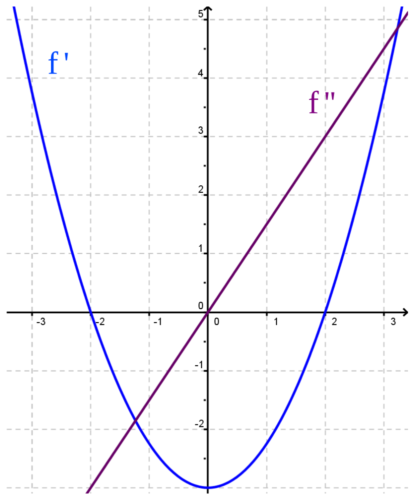


Abbildung 2:

9. Geben Sie waagerechte und senkrechte Asymptote der Funktion $f(x)=\dfrac{3}{2x-1}$ ($x \in \mathbf{D}_f$) an.

---

10. Eine Ebene E ist durch die Punkte A(-3 | 2 | 1), B(2 | 3 |1) und C(5| 4 | 5) festgelegt.
   a) Geben Sie eine Ebenengleichung in Koordinatenform an.

---

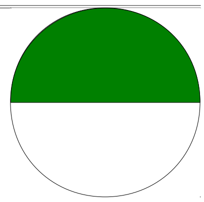
   b) Wie heißen die Spurpunkte von E mit den Koordinatenachsen?

---

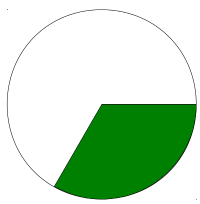
   c) Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, die orthogonal zur Ebene und durch den Punkt P(2 |2 |3) verläuft.

---

11. Mit zwei verschiedenen Glücksrädern werden zwei Spiele angeboten.
Spiel 1: Das Glücksrad darf nur ein Mal gedreht werden. Man gewinnt, wenn der Zeiger auf der farbigen Fläche stehen bleibt.
Spiel 2: Das Glücksrad darf zwei Mal gedreht werden. Man gewinnt, wenn der Zeiger wenigstens ein Mal auf dem Farbfeld stehen bleibt.
Berechnen Sie, welches der beiden Glücksräder die größere Gewinnchance bietet.



Zeichnung 1:
zwei Glücksräder
oben für Spiel 1
unten für Spiel 2



Teil B

Sporthalle: A

Für die Dachkuppel einer 20 Meter breiten Sporthalle stehen drei Varianten zur Auswahl. Die Wandhöhe soll 6 Meter betragen. Der Koordinatenursprung eines Koordinatensystems liege in der Mitte des Hallenbodens (siehe Abbildungen 3 und 4).

1.Die Dachlinie ist ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt.

2.Die Dachlinie ist eine Parabel. Die Gesamthöhe des Bauwerkes beträgt 12 Meter.

3.Die Dachlinie ist eine umgekehrte Kettenlinie der Form $f(x)=a\cdot\left(e^{x}+e^{-x}\right)+b$. Die Parameter a und b sind so zu wählen, dass die Wandhöhe eingehalten wird und die Gesamthöhe 10,5 Meter beträgt.

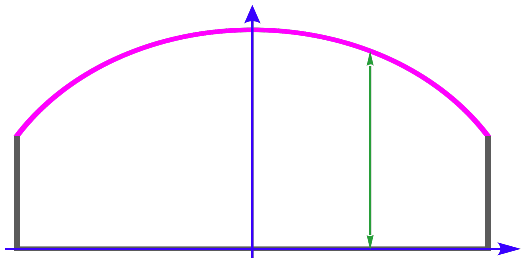


Abbildung 3: Seitenwand mit Kreisbogen
Skizzen nicht maßstäblich

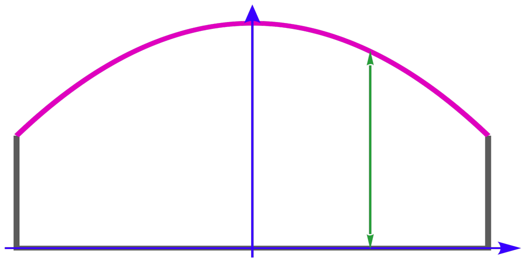


Abbildung 4: Seitenwand mit Parabelbogen

Berechnen Sie für Variante 1:

a) die Höhe des gesamten Bauwerkes, 1 BE

b) den Flächeninhalt einer solchen Seitenwand und 3 BE

c) die Länge der Dachlinie. 2 BE

Berechnen Sie für Variante 2:

d) die Funktion einer passenden Parabel und 3 BE

e) bestimmen Sie den Flächeninhalt der Seitenwand rechnerisch. 2 BE

f) Welches der drei Dächer (Variante 1, 2 und 3) ist 5 Meter von der Seitenwand entfernt am höchsten?
Begründungen Sie ihre Entscheidung rechnerisch. 4 BE

Sporthalle: G

Die Raumhöhe soll zur anderweitigen Nutzung optisch verringert werden. Dazu wird in den Eckpunkten A, B, C (Maße in Abbildung 5) ein dreieckiges Segeltuch befestigt. Seine Oberfläche soll als Ausschnitt einer Ebene angesehen werden.

g) Geben Sie die Koordinaten von A, B und C und eine Parametergleichung der so festgelegten Ebene ε_{ABC} an. 2 BE

zur Kontrolle: Ebene in Normalenform

$$\varepsilon_{ABC}:\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}13\\3\\8\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}8\\2\\55\end{pmatrix}=0$$

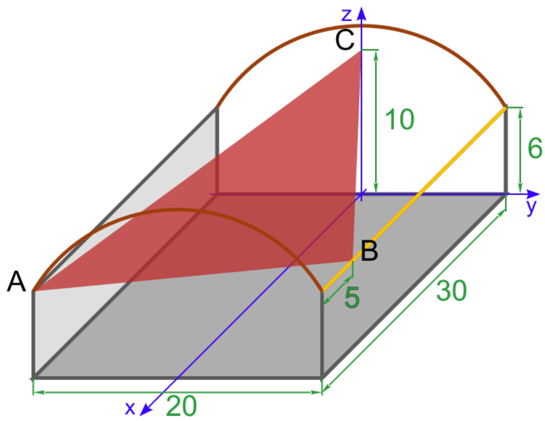


Abbildung 5: Skizze nicht maßstäblich

h) Berechnen Sie, wie stark das Segeltuch gegenüber dem Hallenboden geneigt ist. 2 BE

i) Geben Sie die Größe der Dreiecksfläche an. 1 BE

Die Kosten für das Segeltuch sollen abgeschätzt werden. Der Quadratmeterpreis des Stoffes beträgt schätzungsweise 65€. Im Preis enthalten sind auch die Kosten für beim Zuschnitt entstehende Mehrkosten. Das Säumen entlang der Außenkanten des Dreiecks kostet 80€ pro Meter. Da das Dreieck aus Stoffballen der Breite 5 Meter zusammengesetzt werden muss, ist auch die Länge der Innennähte mit 110€ pro Meter zu beachten.

j) Berechnen Sie:
   I) die Kosten für den Stoff, 1 BE
   II) die Kosten für die Saumnaht, 2 BE
   III) einen Überschlag für die Kosten der Innennähte und 2 BE
   IV) den Gesamtpreis inklusive Mehrwertsteuer von 19%. 1 BE

k) Geben Sie die Größe des Winkels $\sphericalangle(CBA)$ an. 1 BE

l) Ein Punkt B^* soll auf der gelb markierten Kante (Abb. 5) so gewählt werden, dass die Dreiecksfläche rechtwinklig wird. Berechnen Sie die Koordinaten von B^*. 3 BE

Thema: Sporthalle S

Zur Einweihung der Halle wird ein großes Fest veranstaltet. Es wird mit 800 Gästen gerechnet. 80% davon sind Schülerinnen und Schüler. Schülerinnen sind mit 55% gegenüber den Schülern (45%) zahlenmäßig leicht im Vorteil. Unter den restlichen Gästen sind sogar nur 40% männlich.
An jeden Besucher wird genau ein Lotterielos verteilt. Es gibt nur einen Hauptgewinn.

m) Wie viele Schülerinnen gibt es? 1 BE

n) Zeigen Sie: „Die Wahrscheinlichkeit, dass der Hauptgewinn an eine Gewinnerin geht, beträgt 0,56.“ 2 BE

Neben dem Hauptgewinn gibt es noch 10 weitere Gewinne.
Anmerkung: Die Wahrscheinlichkeit für das Gewinnen einer Frau oder Schülerinn ändert sich zwar, aber so wenig, dass im weiteren Verlauf vom Vorliegen einer Binomialverteilung mit der Wahrscheinlichkeit $p_{Frau} = 0,56$ ausgegangen werden kann.

o) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A bis D! 4 BE
   A := „Unter den 11 Gewinnern befinden sich genau 5 Gewinnerinnen.“
   B := „Der 6. Gewinn geht an einen männlichen Schüler.“
   C := „Spätestens der 4. Gewinn geht an eine Gewinnerin.“
   D := „Weniger als 3 Gewinne gehen an Gewinnerinnen.“

p) Beschreiben Sie ein Ereignis E aus dem obigen Sachverhalt, dessen Wahrscheinlichkeit mit
   $P(E)=\binom{11}{5}\cdot 0{,}56^5\cdot 0{,}44^6+\binom{11}{6}\cdot 0{,}56^6\cdot 0{,}44^5$ berechnet wird! 2 BE

Franziska und Georg streiten sich über die Anwesenheit von weiblichen und männlichen Gästen. Während Franziska meint, dass noch mehr als 56% Frauen und Mädchen gekommen sind, sagt Georg, dass es weniger als 50% sind. Franziska legt sich fest: „Es sind bestimmt 60%.“ Georg zählt für 40 zufällig vorbeikommende Personen 23 Weibliche.

q) Bestimmen Sie einen Annahmebereich für Franziskas Meinung. 1 BE

r) Berechnen Sie für diesen Annahmebereich den Fehler 1. Art. 2 BE

s) Erklären Sie in Verbindung mit der oben geschilderten Situation, welche Bedeutung der Fehler 1. Art hat. 1 BE

t) Zu welcher Entscheidung müsste Georg nach Einbeziehen der Fehlerbetrachtungen mit seiner Zählung kommen? 1 BE

u) Warum lässt sich der Fehler 2. Art hier nicht ohne Weiteres berechnen? 1 BE

Lösungen

Teil A

1. Welche Steigung besitzt die Tangente an den Graphen der Funktion $f(x)=\sqrt{2x}$ ($x \in \mathbf{D}_f$) an der Stelle a ihres Definitionsbereichs?

☐	☐	☒	☐	☐
$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2a^3}$	$\frac{2}{\sqrt{2a}}$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}$	$\frac{4}{\sqrt{2a}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2a}}$

2. Bei einem Turnier mit acht Mannschaften spielt jede Mannschaft gegen jede andere ohne Rückrunde. Wie groß ist die Gesamtzahl der Spiele?

☐	☒	☐	☐	☐
16	28	49	56	64

3. Welche der angegebenen Funktionen f besitzt für $x \to \infty$ den Grenzwert 4.

☐	☐	☐	☒	☐
$f(x)=\frac{4x^2-6}{x^3+2x}$	$f(x)=4x^2+\frac{1}{x}$	$f(x)=\frac{4x^3-2x}{2x+x^2}$	$f(x)=\frac{-8x+1}{4-2x}$	$f(x)=\frac{4}{x}-4$

4. Für welchen Wert m sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix} m \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix} -m \\ 2 \\ 4m \end{pmatrix}$ orthogonal zueinander?

☐	☐	☐	☒	☐
m = -6	m = 2	m_1 = -2 m_2 = 6	m_1 = 2 m_2 = 6	m = 6

5. Der Wert des bestimmten Integrals $\int_0^2 -2x^3\,dx$ beträgt:

☐	☒	☐	☐	☐
8	-8	4	-4	-16

6. Die dargestellte Ebene besitzt NICHT die Gleichung:

☐ $4x+5y=20$

☐ $12x+15y-60=0$

☐ $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1$

☒ $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\left[\vec{x}-\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]=0$

☐ $\vec{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

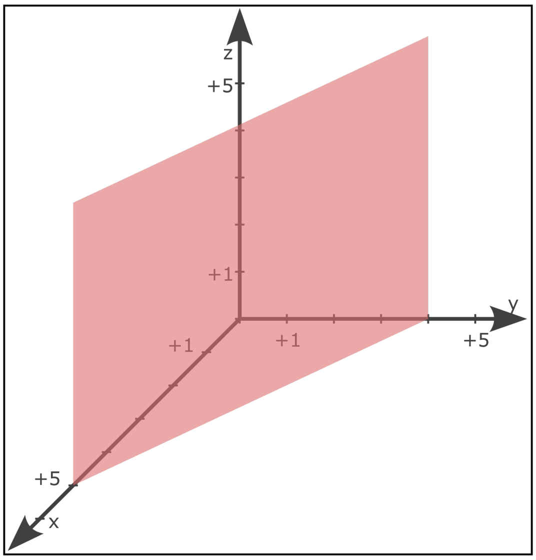


Abbildung 6: Ebene

7. Ein Tetraeder ist mit den Zahlen 1 bis 4 beschriftet wird 1200mal geworfen. Es interessiert die Zufallsgröße X: Anzahl der Einsen.
Wie groß sind Erwartungswert μ und Standardabweichung σ?

☐	☒	☐	☐	☐
$\mu = 300$	$\mu = 300$	$\mu = 300$	$\mu = 400$	$\mu = 400$
$\sigma = 20$	$\sigma = 15$	$\sigma = 225$	$\sigma = 225$	$\sigma = 15$

8. Dargestellt sind die 1. und 2. Ableitung einer ganzrationalen Funktion f.
Welche der nachfolgenden Eigenschaften trifft NICHT für f zu.
   - ☒ f ist achsensymmetrisch.
   - ☐ f besitzt höchstens drei Nullstellen.
   - ☐ Der Tiefpunkt liegt bei x = 2.
   - ☐ Die Wendestelle liegt bei x = 0.
   - ☐ Für x > 2 ist die Funktion f monoton steigend.

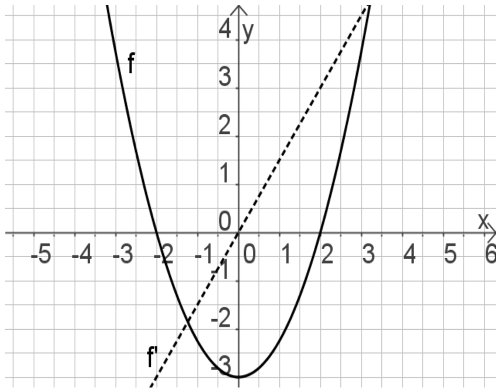


Abbildung 7:

9. Geben Sie waagerechte und senkrechte Asymptote der Funktion $f(x)=\frac{3}{2x-1}$ (x ∈ $\mathbf{D}_f$) an.
y = 0 und x = 1/2

---

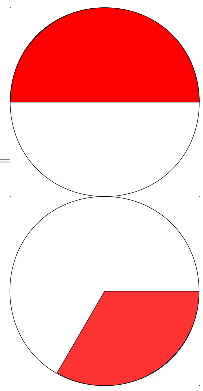
10. Eine Ebene E ist durch die Punkte A(-3 | 2 | 1), B(2 | 3 |1) und C(5| 4 | 5) festgelegt.
   a) Geben Sie eine Ebenengleichung in Koordinatenform an.
   4X – 20y + 2z = -50

---

   b) Wie heißen die Spurpunkte von E mit den Koordinatenachsen?
   D_x(-12,5 | 0 | 0); D_y(0 | 2,5 | 0); D_z(0 | 0 | -25)

---

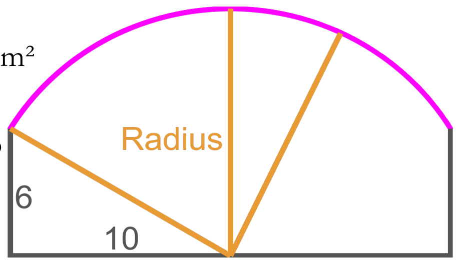
   c) Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, die orthogonal zur Ebene und durch den Punkt P(2 |2 |3) verläuft.
   $$\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\-20\\2\end{pmatrix}$$


Zeichnung 2:
zwei Glücksräder
oben für Spiel 1
unten für Spiel 2

11. Mit zwei verschiedenen Glücksrädern werden zwei Spiele angeboten.
Spiel 1: Das Glücksrad darf nur ein Mal gedreht werden. Man gewinnt, wenn der Zeiger auf der farbigen Fläche stehen bleibt.
Spiel 2: Das Glücksrad darf zwei Mal gedreht werden. Man gewinnt, wenn der Zeiger wenigstens ein Mal auf dem Farbfeld stehen bleibt.
Berechnen Sie, welches der beiden Glücksräder die größere Gewinnchance bietet.
Spiel 1: P(X) = ½
Spiel 2: P(X ≥ 1) = 1 – P(X = 0) = 1 – (2/3)² = 5/9
Spiel 2 bietet die größeren Chancen

Teil B

a) Höhe: $h = \sqrt{10^2+6^2} \approx 11.6619$m



b) Flächeninhalt: $\alpha \approx 118.0725°$; $10 \cdot 6$ + Fläche_Bogen ≈ 200.1312m²

c) Dachlinie: 24.0323m

d) Parabel: p(x,a)= ax² +12 ⟶ SOLVE(p(10, a) = 6, a) ⟶ a = - .06

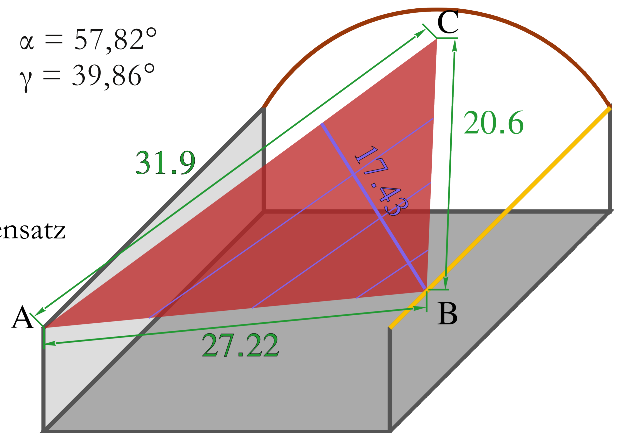
e) Flächeninhalt: $\int_{-10}^{10} -.06\,x^2+12\,dx = 200$m²

f) Vergleich der Höhen: Variante 1: $h = \sqrt{136-25} \approx 10.5357$; Variante 2: p(5) ≈ 10.5; Kettenlinie ist niedriger als 10.5 bzw.: f(x, a) := a ·(EXP(x) + EXP(-x)); SOLVE(f(10, a) + 10.5 = 6, a) ⟶ a = -0.0002042996835 und f(5,-0.0002042996835) ≈ 10.4697; also ist der Kreisbogen am höchsten

g) A(30 |-10 | 6); B(25|10|6); C(0|0|10) ⟶ $\epsilon_{ABC}: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}30\\-10\\-4\end{pmatrix} + \kappa \cdot \begin{pmatrix}25\\10\\-4\end{pmatrix}$

h) Neigungswinkel: $\alpha = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}8\\2\\55\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}8\\2\\55\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}\right) = \arccos\left(\frac{55}{\sqrt{3096}}\right)$ ≈ .1488 = 8,53°

α = 57,82°
γ = 39,86°



i) Flächeninhalt: GTR ⟶ 278.07m²

j) Preise: Stoff = 280m² ·65€/m² =18200€
Saumnaht = 80m ·80€/m = 6400€
Innennaht-Länge ≈ 22.75 + 13.6 + 4.5 = 40.85m
vgl. nebenstehende Abbildung; Anwendung Strahlensatz
$\frac{31.9}{17.43} = \frac{l_1}{12.43} = \frac{l_2}{7.43} = \frac{l_3}{2.43}$
Innennaht ≈ 41m ·110€/m = 4510€
gesamt = 29110€ + 19% = 34641€

k) ∢(CBA) ≈ 82.3° = 1.4364 = β

l) $\overrightarrow{AB}^* \cdot \overrightarrow{CB}^* = 0$ mit $\overrightarrow{OB}^* = \begin{pmatrix}x\\10\\6\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}x-30\\20\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-x\\-10\\4\end{pmatrix} = 0$; 0 = -x² + 30x – 200 ⟶
x = 10 oder x = 20; $P_1(10|10|6)$ und $P_2(20|10|6)$

m) Schülerinnen: 352

n) Weibliche: 352 + 96 = 448 ⟶ 56%

o) P(A) = b(11,.56,5) ≈ .1846 P(B) = (288 + 64)/800 = 1 - .56 = .44
P(C) = 1 - .44⁴ ≈ .9625 P(D) = B(11,.56,2) ≈ .0125

p) E := „Es werden 5 oder 6 Gewinne der 11 Gewinne an Gewinnerinnen verteilt“

q) Annahmebereich:
z. B. k ≥ 22.5 (entspricht > 55%) ⇒ α = B(40,.6,22) ≈ .3115 (NR: 1-B(40,.5,22) ≈ .2148 *höchstens*)
oder k ≥ 21.5 ⇒ α = B(40,.6,21) ≈ .2089 bzw.: 1 – B(40,.5,21) ≈ .3179

s) Franziska hat Recht, d. h. es sind 60% weibliche Gäste, aber in der Stichprobe von Georg sind so wenig Besucherinnen, das Georg denkt er hat Recht.