

# Geometrie

## Inhaltsverzeichnis

Geometrie.....	1
Download.....	2
Aufgaben.....	2
Nutzungsbedingungen.....	2
Formatierung.....	3
Beispiele zur Verwendung des Programms.....	3
Bestimmung des Abstandes einer Geraden zu einer Ebenen.....	4
Berechnungen am Dreieck.....	5
Bestimmung des Abstandes zweier Geraden.....	5
Ausführliche Beschreibung der Arbeit mit dem Unterprogramm Dreieck.....	6
Dokumentation der Programme und Unterprogramme.....	7
ZEING3D.....	8
ZEINGPKT.....	8
ZEPKTLIS.....	8
ZEINGRIC.....	8
ZEINGGER.....	8
ZEINGEBE.....	9
ZVECPROD.....	10
ZOUTRAD.....	10
ZOUTDREI.....	10
DREIECK.....	12
GEOMETRI.....	14
Verwendung von Variablen, Listen und Matrizen.....	18
Verwendung der Label:.....	18

## Download

- besonders geeignet zum Ausdruck dieses Dokuments: [gtrGeo2.pdf](#) (286k)
- TI-82
  - einer Programmgruppe: [\(GEOMETRI.82G\).ZIP](#) (2k)
  - des Programms und der Unterprogramme: [geometri82.zip](#) (3k)
- TI-83
  - einer Programmgruppe: [\(GEOMETRI.83G\).ZIP](#) (2k)
  - des Programms und der Unterprogramme: [geometri83.zip](#) (3k)
- [tifont.zip](#) (74k)

## Aufgaben

Das Programm dient folgendem:

1. Eingabe der notwendigen Koordinaten in einer möglichst komfortablen Weise
2. Berechnung
  - a) Abstand von
    - Punkt - Punkt
    - Punkt - Gerade
    - Punkt - Ebene
    - Gerade - Gerade
    - Gerade - Ebene
  - b) Schnittwinkel von
    - Gerade - Ebene
    - Ebene - Ebene
    - Richtung – Richtung
  - c) Vektorprodukt
  - d) Berechnungen am Dreieck im Raum
    - Längen
    - Innenwinkel
    - Flächeninhalt
    - Normalenvektor
    - Ebenengleichung
    - Schnittpunkt der Höhen (liegt noch nicht vor)
    - Höhenfußpunkte (liegt noch nicht vor)
    - Umkreismittelpunkt mit Radius
    - Inkreismittelpunkt mit Radius
  - e) Erstellen der Ebenengleichungen in
    - Koordinatenform
    - Normalenform (liegt noch nicht vor)
  - f) Spiegelung
    - Punkt an Punkt
    - Punkt an Gerade
    - Punkt an Ebene
  - g) Spurpunkten einer Geraden
3. Ausgabe der Ergebnisse im Display und in Listenform
4. Beachten aller Fälle

## Nutzungsbedingungen

Das Programm kann von allen frei und kostenlos genutzt werden. Unter der Bedingung, dass der Vermerk zur Dokumentation im Internet weiter sichtbar ist, können Programmteile in eigenen Programmen verwendet werden. Das Programm wurde umfassend getestet, trotzdem können Fehler vorhanden sein, die zur Verbesserung des Programms bitte auch mit weiteren Anregungen an [F. Müller](#) weitergeleitet werden können. **Für die Richtigkeit der Ergebnisse übernehme ich keine Gewähr.**

Zur Vereinfachung und Verbesserung der Übersichtlichkeit wurden viele "PROZEDUREN" verwendet, trotzdem ist das HAUPTPROGRAMM noch relativ lang. Das Programm GEOMETRI ist nur bei Vorliegen aller im unten stehenden Text beschriebenen PROZEDUREN arbeitsfähig.

Die nachstehende Programmbeschreibung dient der Dokumentation und ist die **Version 2.3** mit dem Stand vom 24. November 2001.

## Formatierung

Die **Programmnamen** stehen **FETT** dem **Programmtext** (Ti font) vor.


*Diese Seite können Sie nur richtig betrachten oder drucken, wenn dieser Font auf ihrem Computer installiert ist.* Sollte das noch nicht der Fall sein, können sie den [Font hier downloaden](#) (74kb). Die Schriften sind dem Freeware-Programm „GraphLink“ für den TI-82 entnommen (siehe <http://www.ti.com>). Für den richtigen Ausdruck dieser Seite nutzen Sie das entsprechende [pdf-Dokument](#). Sie müssen dafür den Font nicht installieren.




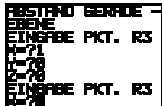




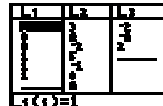

**Anmerkungen** sind in Times New Roman zumeist im Anschluss an den Programmtext zu finden. **Doppelpunkte** am Zeilenanfang werden nicht mitgeschrieben, Doppelpunkte am Zeilenende sollen darauf hinweisen, dass hier nur zur Gliederung ein Zeilenumbruch durchgeführt wurde.


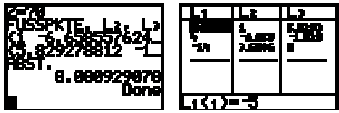
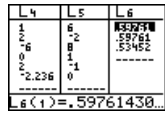
## Beispiele zur Verwendung des Programms

Ich habe versucht, das Programm so übersichtlich wie möglich zu programmieren. Sollten Verbesserungen notwendig werden, schicken Sie mir bitte eine kurze [Mail](#).

Weitere Beispiele sind auch in den jeweiligen Lösungen der Abituraufgaben zu finden (zum Beispiel in den Nachterminen [LK 2000](#) und [GK 2000, GK 2001](#)).

<i>Erläuterungen zum Programm</i>	<i>Display</i>
1. Programmstart und Auswahl im Hauptmenü:	 <p><i>Abbildung 1</i></p>

Erläuterungen zum Programm	Display
<p>2. Beispiel:</p> <p><b>Bestimmung des Abstandes einer Geraden zu einer Ebenen</b></p> <p>a) Auswahl aus den Menüs (Abb. 1, 2, 3).</p> <p>b) Eingabe der Geraden in Punkt-Richtung-Form (Abb. 4, 5).</p> <p>c) Eingabe der Ebene in Punkt-Richtung-Form (Abb. 6, 7 und 8). Dabei ist auch die Eingabe von weiteren Rechnungen möglich.</p> <p>d) Ausgabe der Ergebnisse (Abb. 9). Es wurde ein gemeinsamer Schnittpunkt S ermittelt. Dessen Koordinaten werden in einer Liste angezeigt. Leider kann nur die x-Komponente betrachtet werden, deshalb:</p> <p>e) Kontrolle und weitere Anzeige der Ergebnisse mittels Listen im Menü Stat   Edit (Abb. 10, 11). Interpretation der Listen: L<sub>1</sub>: eingegebene Gerade L<sub>2</sub>: eingegebene Ebene L<sub>3</sub>: ?? L<sub>4</sub>: Ergebnis – Schnittpunkt S(5.4, 4.4, 4.4) L<sub>6</sub>: enthält Normalenvektor L<sub>6</sub>(1)..L<sub>6</sub>(3) und Richtungsvektoren L<sub>6</sub>(4)..L<sub>6</sub>(9) der Ebene (siehe <a href="#">VEKTORPRODUKT</a>)</p>	 <p>Abbildung 2</p>  <p>Abbildung 3</p>  <p>Abbildung 4</p>  <p>Abbildung 5</p>  <p>Abbildung 6</p>  <p>Abbildung 7</p>  <p>Abbildung 8</p>  <p>Abbildung 9</p>  <p>Abbildung 10</p>  <p>Abbildung 11</p>
<p>3. Allgemeine Anmerkung:</p> <p>a) In Listen werden Punkte, Richtungen, Geraden, Ebenen usw. erfasst. Zur Ergebniserfassung ist es immer möglich, sich diese anzeigen zu lassen. Außerdem können sie zur weiteren Rechnung verwendet werden. Ein Schwierigkeit besteht in der Interpretation der Listen. Natürlich kann anhand der Länge der Listen auf die Art des Inhaltes (Pkt. oder Richtung, Ebene usw.) geschlossen werden. Geraden und Ebenen werden immer in der Punkt-Richtung-Form abgelegt. Was aber konkret vorliegt ist in jedem Unterprogramm unterschiedlich. Hier kann nur unter Verwendung der eingegebenen Größen geschlossen werden. Einige Regeln habe ich trotzdem versucht einzuhalten: Ergebnisse befinden sich in Listen mit kleinen Nummern. In Liste 6 sind keine Ergebnisse abgespeichert. Liste 6 dient zur Speicherung von Zwischenergebnissen und wird zumeist (nach der Eingabe) vom Programm geändert.</p> <p>b) Die Berechnung des <b>Durchstoßpunktes</b> einer Geraden durch eine beliebige Ebene ist ein Sonderfall, des Abstandsproblems Gerade – Ebene. Durchstoßpunkte werden also dort mit ermittelt.</p> <p>c) Genau so verhält es sich mit der Bestimmung der Schnittpunkte zweier Geraden. Sie sind ein Spezialfall bei der Berechnung des Abstandes der Geraden und werden dort mit angegeben.</p>	

Erläuterungen zum Programm	Display
<p>4. Beispiel:</p> <p><b>Berechnungen am Dreieck</b></p> <p>a) Auswahl aus dem Hauptmenü (Abb. 1)</p> <p>b) Eingabe der Koordinaten der Eckpunkte. Werden die Punkte in der Reihenfolge A, B, C eingegeben, so können die Längen und Winkel auch in dieser Reihenfolge interpretiert werden.</p> <p>c) Ausgabe der Ergebnisse (Abb. 12)</p> <p>d) Interpretation der Listen (Abb. 13)</p> <p>L<sub>1</sub>: Längen der Seiten in der Reihenfolge a, b, c                      L<sub>2</sub>: Innenwinkel in der Reihenfolge alpha, beta, gamma                      L<sub>3</sub>: ??</p> <p>Anmerkung: Bei der Ausgabe der Ergebnisse ( 12) wird auf eine Ausnahme hingewiesen: in L<sub>1</sub>(4) wird zusätzlich der Flächeninhalt des Dreiecks abgespeichert.</p>	 <p>Abbildung 12      Abbildung 13</p>
<p>5. Beispiel:</p> <p><b>Bestimmung des Abstandes zweier Geraden</b></p> <p>a) Auswahl in den Menüs und Eingabe der Geraden</p> <p>b) Ausgabe des Ergebnisses (Abb. 14) – der Abstand beträgt: 8.08</p> <p>c) Interpretation der Listen (Abb. 15, 16)</p> <p>L<sub>1</sub>: ??                      L<sub>2</sub>: Fußpunkt der ersten Gerade                      L<sub>3</sub>: Fußpunkt der zweiten Gerade                      L<sub>4</sub>: erste Gerade                      L<sub>5</sub>: zweite Gerade                      L<sub>6</sub>: ??</p> <p>d) weitere Rechnung zum Beispiel:                      bei Eingabe von <math>\text{sum}((L, -L_f) \cdot \Delta)</math> ergibt sich das Abstandsquadrat 65.3 oder                      bei Eingabe von <math>L, -L_f</math> ergibt sich der Vektor <math>\{-4.829, -4.829, -4.319\}</math> als Richtungsvektor von einem Lotfußpunkt zum anderen.</p>	 <p>Abbildung 14      Abbildung 15</p>  <p>Abbildung 16</p>

## Ausführliche Beschreibung der Arbeit mit dem Unterprogramm Dreieck

Das Programm DREIECK ist seit Mai 2001 verfügbar. Vorgängerversionen von GEOMETRI enthalten noch einige Fehler und sollten nicht weiter verwendet werden.

Beispiel 1:  $A(1 \mid 0 \mid 0)$ ,  $B(0 \mid 1 \mid 0)$  und  $C(-1 \mid 0 \mid 0)$

Beispiel 2:  $A(2 \mid 1 \mid 0)$ ,  $B(10 \mid -1 \mid 0)$  und  $C(11 \mid 3 \mid 0)$   
[Schriftliche Abiturprüfung 2001 – Grundkurs](#)

Beispiel 3:

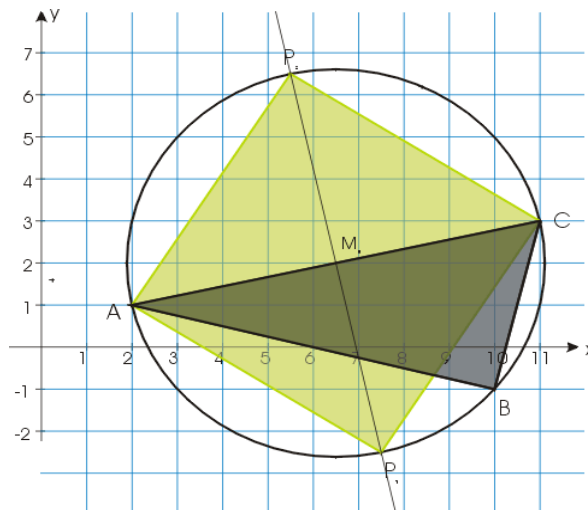


Abbildung 17: zu Beispiel 2

### Erläuterungen

- Starten des Programms (Abbildung 17: zu Beispiel 2)
- Ausführen des Programmteils Dreieck (Abbildung 18)
- Eingabe der Punkte A, B und C (Abbildung 20, 21)
- Nach kurzer Berechnung aller relevanter Daten:
- Auswahl der interessierenden Angaben
  - Beispiel: Seitenlänge  
 In der Ausgabe wird angezeigt, in welcher Liste die Angaben gespeichert wurden. Zumeist sind das die Listen 6 und 5. In Liste 1 stehen, wie in Tabelle 1 beschrieben, alle Ergebnisse.  
 Sollten die Listen im Display nicht ganz zu lesen sein, können die Listen im Stat – Edit – Menü konsultiert werden. Dazu weiter unten mehr.
  - Beispiel: Winkel

### Ansicht GTR

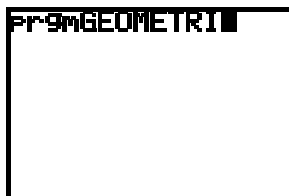


Abbildung 18



Abbildung 19

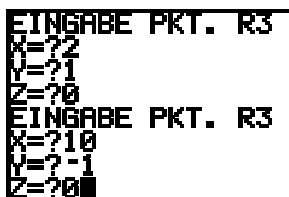


Abbildung 20

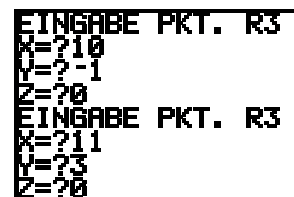


Abbildung 21

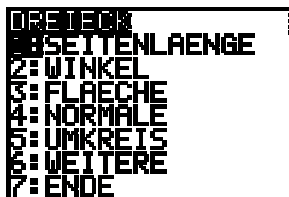


Abbildung 22

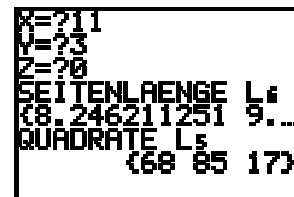


Abbildung 24



Abbildung 23

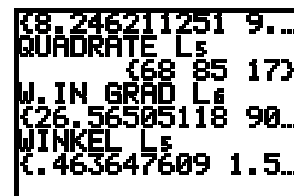


Abbildung 25

**Erläuterungen**

- Beispiel: Umkreis  
 Wie in Abbildung 35 und anderen zu sehen ist, wird immer auch das Quadrat der Längen angegeben. Damit können gegebenenfalls die exakteren Werte verwendet werden.  
 Das Programm GEOMETRI.82G sollte so sicher sein, dass Fälle in denen keine Lösungen möglich sind, automatisch erkennt und anzeigt. In diesen Fällen sollte der Benutzer nochmals die eingegebenen Werte überprüfen bzw. über den Sinn der Berechnung nachdenken.

- Übersicht über das vollständige Menü Anmerkungen:
  - Inkreis im Moment noch unfertig (liefert falsche Ergebnisse)
  - Ebenengleichung noch unfertig (liefert keine Ergebnisse)
- Das Beenden der Anzeige der Ergebnisse ist auf zweierlei Weisen möglich. Sie kehren in's Display zurück. Danach können die gespeicherten Listen kontrolliert werden. Da sind die vollständigen Werte zu sehen.
- Die folgenden Listen gehören zur Berechnung der Seitenlängen. Um die Listen zu sehen, wählen Sie [STAT] + Edit. Wie auch in Abbildung 22 zu erkennen ist, enthält L<sub>6</sub> die Seitenlängen und L<sub>5</sub> deren Quadrate.
- Sollte die Liste L<sub>1</sub> nicht beschädigt sein, ist es möglich, die Anzeige der Ergebnisse fortzusetzen ohne die Eckpunkte nochmals einzugeben. Starten Sie dazu einfach das Programm prgmZOUTDREI.

**Ansicht GTR**



Abbildung 26

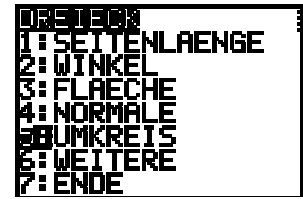


Abbildung 28

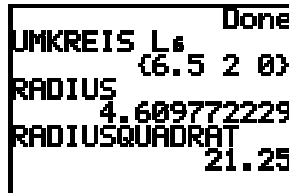


Abbildung 27



Abbildung 29

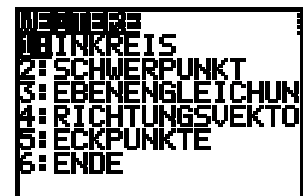


Abbildung 30

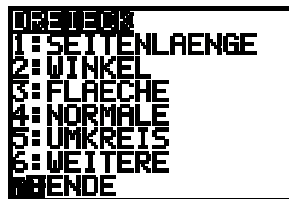


Abbildung 31



Abbildung 32

L1	L2	L3
0	0	0
1	0	0
0	0	0
10	-----	-----
-1		
0		
11		

L1(1)=2

Abbildung 33

L4	L5	L6
0	08	0.4428
0	05	9.2192
0	17	4.1231
-----	-----	-----

L6(1)=8.2462112...

Abbildung 34



Abbildung 35

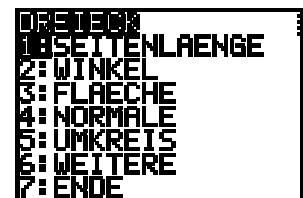


Abbildung 36

**Dokumentation der Programme und Unterprogramme**

Im Folgenden habe ich versucht die Programmtexte vollständig anzugeben. An einigen Stellen habe ich die theoretischen Hintergründe für die Programmierung dargestellt. Für die Übernahme der TI-Programme sollten sie aber unbedingt die [Quelltexte downloaden](#), ein entsprechendes Kabel und die Freeware [TI-GraphLink](#) verwenden.

## ZEING3D

```
: Prompt X: Prompt Y: Prompt Z
```

Zur Eingabe der Koordinaten im Raum vorgesehen und in den Programmen ZEINGPKT und ZEINGRIC eingesetzt.

Das den Programmnamen vorstehende Z<sup>1</sup> verschiebt die Eingabeprogramme an das Ende der Programmliste, denn es hat keinen Zweck diese Programme ohne das Hauptprogramm GEOMETRIE zu verwenden.

## ZEINGPKT

```
: Di sp "EINGABE PKT. R3": prgmZEING3D
```

Eingabe der Koordinaten eines Punktes

Wird in den meisten Programmen verwendet, insbesondere den Programmen die zur Eingabe von Geraden (ZEINGGER) und Ebenen (ZEINGEBE) dienen. Analog zu dem Programm ZEINGPKT wird mit ZEINGRIC ein Richtungsvektor eingegeben. Ein Nullvektor kann kein Richtungsvektor sein, sollte er trotzdem eingegeben werden, so wird die Abarbeitung des Programms gestoppt und auf dem Display die Meldung "KEINE RICHTUNG ANGEGEBEN -STOP" ausgegeben..

Übergabe der Größen durch die Variablen X, Y und Z; Auswertung im aufrufenden Programm.

## ZEPKTLIS

```
: prgmZEINGPKT: XÜL†(1): YÜL†(2): ZÜL†(3)
```

Wie ZEINGPKT mit Übergabe der Größen durch L<sub>6</sub> und Weiterverarbeitung im aufrufenden Programm.

## ZEINGRIC

```
: Di sp "EINGABE RICHTUNG"
: prgmZEING3D
: If X=0 and Y=0 and Z=0: Then: Di sp "KEINE
RICHTUNG", "ANGEGEBEN STOP": Stop: End
```

## ZEINGGER

```
: 6üdi m L†
: Menu("EINGABE GERADE", "PKT. úRICHTUNG", A, "ZWEI PUNKT", B)

: Lbl A
: OüA

: Lbl D
: prgmZEINGPKT: XÜL†(1): YÜL†(2): ZÜL†(3)
: If A=1
: Then: prgmZEINGRIC
: Else: prgmZEINGPKT: End: XÜL†(4): YÜL†(5): ZÜL†(6)
: Goto C
```

---

<sup>1</sup> Früher verwendete ich Theta, welches oftmals zu Problemen bei der Speicherung und Weitergabe der Programme führte.

```

: Lbl B
: 1üA: Goto D

: Lbl C
: If A
: Then: Lt(4) - Lt(1) ÷ Lt(4): Lt(5) - Lt(2) ÷ Lt(5): Lt(6) -
Lt(3) ÷ Lt(6): End
: If Lt(4)=0 and Lt(5)=0 and Lt(6)=0
: Then: Di sp "KEINE RICHTUNG": Stop: End

```

Eingabe einer Gerade  $g: x = P + s r$ .

- in Punkt-Richtungs-Form
- in Zweipunktform

Die Koordinaten der Gerade werden zunächst in Liste 6 gespeichert. Dabei hat  $L_6$  genau 6 Elemente, wobei die ersten 3 Listenelemente die Koordinaten eines Punktes sind, durch den die Gerade verläuft und die folgenden 3 Elemente repräsentieren den Richtungsvektor. Dabei wird die Geradengleichung durch Punkt P und Richtung r gegeben. Es gilt:  $L_6(1) = P_x$ ;  $L_6(2) = P_y$ ;  $L_6(3) = P_z$  und  $L_6(4) = r_x$ ;  $L_6(5) = r_y$ ;  $L_6(6) = r_z$ . Die Gerade wird also stets in der Form Punkt-Richtung abgespeichert, egal ob sie in der Punkt-Richtungs- oder Zweipunktform eingegeben wurde. Die Eingabe des Nullvektors anstelle des Richtungsvektors bewirkt den Abbruch des Programms.

## ZEINGEBE

```

: 9üdi m Lt
: Menu("EINGABE EBENE", "PKT. + 2 RICHTUNG", A, "DREI PUNKT", B)

: Lbl A: OüA

: Lbl D
: prgmZEI NGPKT: XüLt(1): YüLt(2): ZüLt(3)
: For(I, 1, 2)
: If A=1
: Then: prgmZEI NGPKT
: Else: prgmZEI NGRIC
: End
: XüLt(1+3*I): YüLt(2+3*I): ZüLt(3+3*I)
: End
: Goto C

: Lbl B
: 1üA: Goto D

: Lbl C
: If A
: Then
: For(J, 1, 2)
: For(I, 1, 3): Lt(J*3+I) - Lt(I) ÷ Lt(J*3+I): End
: End
: End
:
: Lt(4)Lt(7)+Lt(5)Lt(8)+Lt(6)Lt(9)üA: (Lt(4)÷+Lt(5)÷+Lt(6)÷)*
(Lt(7)÷+Lt(8)÷+Lt(9)÷)üB

```

```

: If abs (A-B) < 5
: Then: Di sp "DIE RICHTUNGSVEK", "SIND PARALLEL", "KEINE EBENE
EIN-", "GEGEBEN - STOP": Stop: End
: If (L†(4)=0 and L†(5)=0 and L†(6)=0) or (L†(7)=0 and
L†(8)=0 and L†(9)=0)
: Then: Di sp "FEHLER RICHT. -VE", "IST NULLVEKTOR": Stop: End

```

Eingabe einer Ebene

- in Punkt-Richtungs-Form
- in Dreipunktform

Ebene wird an aufrufendes Programm durch  $L_6$  übergeben. Die Bedeutung der 9 Listenelemente ist ähnlich der Geraden wieder Punkt-Richtung-Richtung.

Es wird überprüft, ob die Richtungsvektoren parallel sind, oder einer der Richtungsvektoren der Nullvektor ist. Sollte dieser Fall eintreten wird die Abarbeitung gestoppt.

## ZVECPROD

```

: If dim L† ≠ 9
: Then: Di sp "FEHLER", "VEKTORPRODUKT", "KANN NICHT
BEREÚ", "CHNET WERDEN L†": Stop
: Else: L†(5)L†(9) - L†(6)L†(8) ÷ L†(1): L†(6)L†(7) -
L†(4)L†(9) ÷ L†(2): L†(4)L†(8) - L†(5)L†(7) ÷ L†(3)
: End

```

Berechnung des Vektorproduktes

Zur Eingabe der beiden Richtungsvektoren durch das aufrufende Programm wird Liste 6 verwendet. Es wird vorausgesetzt, dass sie die Positionen 4 bis 9 belegen, wie es bei Ebenen vorliegen würde. Das Ergebnis wird auf die Positionen 1 - 3 gelegt. Damit ergibt sich durch Kürzen der Liste auf nur noch 3 Elemente der Kreuzvektor.

## ZOUTRAD

```

: If W > 90: Then: W ÷ 180: End: Di sp "WINKEL IN RAD", W, "
IN
GRAD", W/180, "GTR AUF RADIANT", "UMGESTELLT"

```

Zur Ausgabe der Winkel. Es werden Winkel zwischen  $-90^\circ$  und  $90^\circ$  ausgegeben. Unter Umständen muss der Benutzer selbst entscheiden, ob negative Winkel durch Weglassend des Vorzeichens als positive Winkel ausgegeben werden sollen.

## ZOUTDREI

```

: If dim L < 50: Then: Di sp "ERST prgmDREI ECK AUSFUEHREN": Else:
: Lbl Y
: ClrList L, Lf, L,, L..., L†: 3üdi m L, : 3üdi m Lf: 3üdi m L,, : 3üdi m
L...: 3üdi m L†
: Menu("DREI ECK", "SEITENLAENGE", A, "WINKEL", B, "FLAECHE", C, "NO
RMALE", D, "UMKREIS", F, "WEITERE", W, "ENDE", Z)
:
: Lbl W
: Menu("WEITERE", "INKREIS", G, "SCHWERPUNKT", H, "EBENENGLEICHUN
G", E, "RICHTUNGSVEKTOREN", I, "ECKPUNKTE", J, "ENDE", Z)

```

2 Dieser Fall kann bei Verwendung des „arccos“ entstehen.

```

:
: Lbl A
: For(I, 1, 3): L (I+18)üL...(I): L (I+21)üL†(I): End
: Di sp "SEITENLAENGE L†", L†, "QUADRATE L...", L...
: Goto X
:
: Lbl B
: For(I, 1, 3): L (I+25)üL...(I): L (I+29)üL†(I): End
: Di sp "W. IN GRAD L†", L†, "WINKEL L...", L...
: Goto X
:
: Lbl C
: Di sp "FLAECHE", L (25)
: Goto X
:
: Lbl D
: For(I, 1, 3): L (I+15)üL†(I): End
: Di sp "NORMALE L†", L†
: Goto X
:
: Lbl E
: Di sp "EBENENGLEICHUNG"
: Goto X
:
: Lbl F
: For(I, 1, 3): L (I+37)üL†(I): End
: Di sp "UMKREIS
L†", L†, "RADIUS", L (42), "RADIUSQUADRAT", L (41)
: Goto X
:
: Lbl G
: For(I, 1, 3): L (I+45)üL†(I): End
: Di sp "INKREIS L†", L†, "RADIUS", L (49)
: Goto X
:
: Lbl H
: For(I, 1, 3): L (I+42)üL†(I): End
: Di sp "SCHWERPUNKT L†", L†
: Goto X
:
: Lbl I
: For(I, 1, 3): L (I+9)üL†(I): L (I+12)üL...(I): End
: Di sp "R-VEKTOREN L†, L..., L†-L...", L†, L..., L†-L...
: Goto X
:
: Lbl J
: For(I, 1, 3): L (I)üL†(I): L (I+3)üL...(I): L (I+6)üL„(I): End
: Di sp "ECKPUNKTE L†, L..., L„", L†, L..., L„
: Goto X
:
: Lbl K
: Goto X
:

```

```

: Lbl X
: Pause : Menu(" ANDERE ANGABEN", " JA", Y, " NEI N", Z):
: End
: Lbl Z
: Cl rHome

```

Das Unterprogramm ZOutDrei liefert alle berechneten Daten des Dreiecks in übersichtlicher Form. Es kann diese Daten nur dann anzeigen, wenn vorher das Programm DREIECK, welches auch unabhängig vom Programm GEOMETRI gestartet und verwendet werden kann, Liste 1 mit Werten gefüllt hat. Das Programm GEOMETRI bindet die beiden Programme mit ein.

## DREIECK

```

: Cl rHome: Cl rList L , L , Lf , L„ , L... , L†
: 5Üdi m L : 9Üdi m L†
: {3, 3}üdi m [A]: {3, 1}üdi m [B]
:
: prgmZEI NGPKT: XüL (1): YüL (2): ZüL (3): Xò+Yò+ZòüL (35)
: prgmZEI NGPKT: XüL (4): YüL (5): ZüL (6): Xò+Yò+ZòüL (36)
: prgmZEI NGPKT: XüL (7): YüL (8): ZüL (9): Xò+Yò+ZòüL (37)
:
: For(I , 1, 3)
: L (I+3)-L (I)üL (I+9): L (I+9)üL (I): L (I)üL†(I+3)
: L (I+6)-L (I)üL (I+12): L (I+12)üLf(I): Lf(I)üL†(I+6)
: End
: prgmZVECPRD: 3üdi m L†: L , -LfüL„
: For(I , 1, 3): L†(I)üL (I+15): End
: (sum (L , ò))üL (19)
: (sum (Lfò))üL (20)
: (sum (L„ò))üL (21)
: For(I , 19, 21): ðL (I)üL (I+3): End
: ð(sum (L†ò))/2üL (25)
:
: cosñ (sum (L , Lf)/L (22)/L (23))üL (26)
: cosñ (sum (L , L„)/L (22)/L (24))üL (27)
: cosñ (úsum (LfL„)/L (23)/L (24))üL (28)
: For(I , 26, 28): L (I)/1òüL (I+3): End
: 9Üdi m L†: For(I , 4, 9): L (I)üL†(I): End: prgmZVECPRD: 3üdi m
L†: For(I , 1, 3): L†(I)üL (I+31): End: L üL...: 3üdi m L...
:
: L (10)ü[A] (1, 1)
: L (11)ü[A] (1, 2)
: L (12)ü[A] (1, 3)
: L (13)ü[A] (2, 1)
: L (14)ü[A] (2, 2)
: L (15)ü[A] (2, 3)
: L (16)ü[A] (3, 1)
: L (17)ü[A] (3, 2)
: L (18)ü[A] (3, 3)
:
: . 5(L (36)-L (35))ü[B] (1, 1)
: . 5(L (37)-L (35))ü[B] (2, 1)
: sum (L...L†)ü[B] (3, 1)
:

```

```

: If abs (det [A]) < 5: Then: Disp "KEIN DREIECK"
: Else
: [A] ñ [B] ñ [C]: [C] (1, 1) ñL (38): [C] (2, 1) ñL (39): [C] (3, 1) ñL (40)
: For(I, 1, 3): L (I+37) ñL, (I): L (I) ñL f(I): End: sum ((Lf-
L, ) ñ) ñL (41): ñL (41) ñL (42)
: For(I, 1, 3): L (I) ñL, (I): L (I+3) ñL f(I): L (I+6) ñL, (I): L (I+21)
) ñL... (I): End: L, +Lf+L, ñL †: For(I, 1, 3): L †(I)/3 ñL (I+42): End: (L...
(1)L, +L... (2)Lf+L... (3)L, )/sum
L... ñL †: For(I, 1, 3): L †(I) ñL (I+45): End: sum ((L †-L, ) ñ) si n
(L (26)/2) ñL (49)
: prgmZOUTDREI
: End
    
```

Für Programmierer gebe ich jetzt eine Tabelle an, die die Bedeutung der Werte in Liste 1 verdeutlichen sollen. Damit kann das Programm getestet und eventuell vorhandene Fehler entfernt werden.

<i>i</i>	<i>Bedeutung</i>		<i>L<sub>1</sub>(i) – Bsp. 1</i>	<i>L<sub>1</sub>(i) – Bsp. 2</i>
1	Ortsvektor	x	1	2
2	P <sub>1</sub>	y	0	1
3		z	0	0
4	Ortsvektor	x	0	10
5	P <sub>2</sub>	y	1	-1
6		z	0	0
7	Ortsvektor	x	-1	11
8	P <sub>3</sub>	y	0	3
9		z	0	0
10	Richtungsvektor	x	-1	8
11	$\vec{P_1P_2}$	y	1	-2
12		z	0	0
13	Richtungsvektor	x	-2	9
14	$\vec{P_1P_3}$	y	0	2
15		z	0	0
16	Normale	x	0	0
17	$\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3}$	y	0	0
18		z	2	34
19	$ \vec{P_1P_2} ^2$	c <sup>2</sup>	2	68
20	$ \vec{P_1P_3} ^2$	b <sup>2</sup>	4	85
21	$ \vec{P_2P_3} ^2$	a <sup>2</sup>	2	17
22	$ \vec{P_1P_2} $	c	1,41	8,25

<i>i</i>	<i>Bedeutung</i>		<i>L<sub>1</sub>(i) – Bsp. 1</i>	<i>L<sub>1</sub>(i) – Bsp. 2</i>
23	$ P_1\vec{P}_3 $	b	2	9,22
24	$ P_2\vec{P}_3 $	a	1,41	4,12
25	Flächeninhalt		1	17
26	$\angle P_1$ in Radiant		0,78	0,46
27	$\angle P_2$		1,57	1,57
28	$\angle P_3$		0,78	1,11
29	$\angle P_1$ in Grad		45	26,57
30	$\angle P_2$		90	90
31	$\angle P_3$		45	63,43
32	Normale	x	0	0
33	$\vec{OP}_1 \times \vec{OP}_2$	y	0	0
34		z	1	41
35	$ \vec{OP}_1 ^2$		1	5
36	$ \vec{OP}_2 ^2$		1	101
37	$ \vec{OP}_3 ^2$		1	130
38	Umkreis	x	0	6,5
39	$M_U$	y	0	2
40		z	0	0
41	$R^2$		1	21,25
42	R		1	4,61
43	Schwerpunkt	x	0	7,67
44	S	y	0,33	1
45		z	0	0
46	Inkreis	x	0	8,85
47	$M_I$	y	0,41	0,91
48		z	0	0
49	R			1,57
50	ohne		0	0

Tabelle 1

## GEOMETRI

: Cl rHome: Cl rLi st L , L , Lf , L , L... , Lt: 0ÜS

```

: Di sp "DOKUMENTATION",
"WWW/SN. SCHULE. DE", "/TILDE REI MEGYM", "",
"TILDE IST DAS ZEICHEN", "SCHLANGENLINIE"
:
: Menu("ANALYT. GEOMETRIE", "ABSTAENDE", A,
"SCHNITTWINKEL", G, "VEKTORPRODUKT", K,
"DREIECK", L, "EBENENGLEICHUNG", M,
"SPIEGELUNG", N, "DURCHSTOSSPKT", O)

```

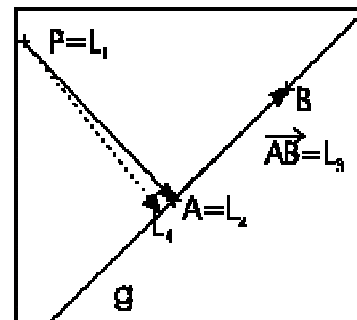


Abbildung 37

```

: Lbl A
: Menu("ABSTAENDE", "PUNKTÜPUNKT", P, "PUNKTÜGERADE", B, "PUNKTÜE
BENE", C, "GERADEÜGERADE", D, "GERADEÜEBENE", E)

```

```

: Lbl G
: Menu("SCHNITTWINKEL", "ZWEIER
EBENEN", H, "GERADEÜEBENE", I, "ZWEIER RICHTUNGE", J)

```

```

: Lbl N
: Menu("SPIEGELUNG", "PUNKT-PUNKT", Q, "PUNKT-GERADE", R, "PUNKT-
EBENE", S)

```

```

: Lbl S: 1ÜS: Goto C
: Lbl R³: 1ÜS: Goto B

```

```

: Lbl Q: 3üdi m Lt: 3üdi m L...: 3üdi m L,,: Cl rHome: Di sp
"SPIEGELUNG", "PKT. -PKT.", "", "ZENTRUM
EINGEBEN": prgmZEPKTLI S: LtüL...: prgmZEPKTLI S: 2*L...-LtüL,,: Di sp
"PUNKT L,,", L,,: Goto F

```

```

: Lbl O: Di sp "DURCHSTOSSPKTE.", "GERADEÜKOO. ÜEBEN":
prgmZEINGGER: For(I, 1, 3): Lt(I+3)üL...(I): End: 3üdi m Lt: Di sp "D
XY": If L...(3)Ø0: Then: Di sp "D XY", Lt-Lt(3)/L...(3)*L...: El se: Di sp
"KEIN": End: Di sp "D XZ": If L...(2)Ø0: Then: Di sp Lt-
Lt(2)/L...(2)*L...: El se: Di sp "KEIN": End: Di sp "D YZ": If
L...(1)Ø0: Then: Di sp Lt-Lt(1)/L...(1)*L...: El se: Di sp
"KEIN": End: Goto F

```

```

: Lbl P: Cl rList L..., Lt: Di sp "ABSTAND
PKTÜPKT": prgmZEPKTLI S: LtüL...: prgmZEPKTLI S: Lt-L...üL,,: Di sp
"QUAD.", sum(L,,Ø), "ABSTAND", Øsum(L,,Ø): Goto F

```

```

: Lbl M
: Di sp "BESTIMME ALLGEM.", "UND PARAM. -FREIE", "FORM AUS 3
PKT.", "DER EBENE ENTER": Pause
: prgmZEINGEBE: LtüL...: LtüLf: prgmZVECPROD: 3üdi m L...: 3üdi m
Lt: Üsum(L...Lt)üLt(4): Di sp "Lt ENTHEALT
DIE", "KOEFFIZIENTEN", "AX+BY+CZ+D=0", Lt: Goto F

```

3 Ausgehend von der Geraden  $g(AB)$  und dem Punkt  $P \notin g(AB)$  ergibt sich der Lotfußpunkt  $L$  mit  $\vec{OL} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB}$ ,  $\vec{PL} \cdot \vec{AB} = (\vec{AP} - r \cdot \vec{AB}) \cdot \vec{AB} = 0$  der Spiegelpunkt  $P'$  aus  $\vec{OP}' = 2\vec{OL} - \vec{OP}$ . Es folgt:  $r = \frac{\vec{AP} \cdot \vec{AB}}{\vec{AB}^2}$  und  $\vec{OP}' = 2\vec{OA} - \vec{OP} + 2r \cdot \vec{AB}$ . Zuordnung der Listen: 1  $\rightarrow$  OP; 2  $\rightarrow$  OA; 3  $\rightarrow$  OB; 4  $\rightarrow$  AB; 5  $\rightarrow$  AP. Ergebnisse: 6  $\rightarrow$  OP'; 5  $\rightarrow$  OL.

```

: Lbl L
: prgmDREI ECK
: Goto F

: Lbl K
: 9üdi m L†: Di sp
"VEKTORPRODUKT": prgmZEI NGRI C: XüL†(4): YüL†(5): ZüL†(6): prgmZE
I NGRI C: XüL†(7): YüL†(8): ZüL†(9): prgmZVECPROD: 3üdi m L†: Di sp
L†: Goto F

: Lbl J
: prgmZEI NGRI C: XüL (1): YüL (2): ZüL (3): prgmZEI NGRI C: XüL, (1):
YüL, (2): ZüL, (3): Radi an: cosñ (sum (L L, )/ðsum (L ò)/ðsum
(L, ò))üW
: Di sp "EI NGESCHLOSSENER": prgmZOUTRAD: Goto F

: Lbl I4
: prgmZEI NNGER: L†üL : For(I, 1, 3): L (I+3)üLf(I): End: prgmZEI NGE
BE: L†üL, : prgmZVECPROD: L†üL,, : 3üdi m L,, : Radi an: cosñ (sum
(LfL,,)/ðsum (Lfò)/ðsum (L,,ò))üW: W-Ä/2üW
: prgmZOUTRAD: Goto F

: Lbl H5
: prgmZEI NNGEBE: L†üL : prgmZEI NNGEBE: L†üL, : prgmZVECPROD: L†üL,, : 3
üdi m L,, : L üL†: prgmZVECPROD: L†üLf: 3üdi m Lf: Radi an: cosñ (sum
(LfL,,)/ðsum (Lfò)/ðsum (L,,ò))üW: Ä-WüW
: Di sp "EI NGESCHLOSSENER": prgmZOUTRAD6: Goto F

: Lbl E7
: Di sp "ABSTAND
GERADE- ", "EBENE": prgmZEI NNGER: L†üL : prgmZEI NNGEBE: L†üL, : {3, 3
}üdi m [A]: {3, 1}üdi m [B]: For(I, 1, 3): L (I) -
L, (I)üLf(I): üL (I+3)ü[A](I, 1): L, (I+3)ü[A](I, 2): L, (I+6)ü[A](
I, 3): Lf(I)ü[B](I, 1): End

```

#### 4 Unterprogramm "Schnittwinkel Gerade-Ebene"

Lösungsweg: Berechnung der Normalen; der gesuchte Winkel ergibt sich als Ergänzung des berechneten Winkels zu  $\pi/2$ .

#### 5 Unterprogramm "Schnittwinkel Ebene-Ebene"

Lösungsweg: Durch bestimmen der Normalen erhält man Sehnenvierecke, in denen eine Diagonale der Durchmesser des Kreises ist. Der gesuchte Winkel ist also die Ergänzung des Normalenschnittwinkel zu  $\pi$ .

6 Die Berechnung der Winkel erfolgt zumeist durch Anwenden des **arccos** und weiterer Addition oder Subtraktion von  $180^\circ$  oder  $\pi$ . Da nicht die Rechnung in Grad oder Radian vorausgesetzt werden kann, **stellt das Programm automatisch auf Radian um**. Das ist unbedingt für die weitere Arbeit zu beachten.

#### 7 Unterprogramm "Abstand Gerade-Ebene"

Eingabe der Gerade  $L_1$  und der Ebene  $L_2$  und Lösung des Gleichungssystems, vorheriges Überprüfen der Lösbarkeit des Gleichungssystems (ist das lineare GS nicht lösbar, so schneidet die Gerade die Ebene nicht und es wird nun der Abstand Punkt - Ebene bestimmt anderenfalls Ermittlung des gemeinsamen Schnittpunktes).

```

: If det [A]=0: Then: prgmZVECPROD: L†üL„: 3üdi m L„: L„/ðsum
(L„ ò)üL„: For(I, 1, 3): üL„(I)ü[A](I, 1): End: [A]ñ[B]ü[C]: Di sp
"ABST.", abs ([C](1, 1)): El se: [A]ñ[B]ü[C]: For(I, 1, 3):
L (I)+[C](1, 1)L (I+3)üL„(I): End: Di sp "GEM.
SCHNITTPKT.", L„: End: Goto F
    
```

```

: Lbl D8
: ClrHome: Di sp "ABSTAND GERADE ú", "GERADE"
: prgmZEINGGER: L†üL„: prgmZEINGGER: L†üL„: L„-L„üL : 3üdi m
L : For(I, 1, 3): L„(I+3)üL„(I): L„(I+3)üLf(I): End
: sum (L, Lf)üX: Xð-sum (L, ò)sum (Lfð)üZ: Z=0üP
: If P: Then: (sum (L Lf))ð-sum (L ò)sum (Lfð)=0üG: If
G: Then: Di sp "IDENTISCHE GERADEN": El se:
: L„üL†: 3üdi m L†: sum (L Lf)/sum (Lfð)üS: L„üL : 3üdi m
L : L†+SLfüL†: sum ((L -L†)ð)üA: Di sp "PARALLELE
ABST. ò", A, "ABSTAND ", ðA: End: El se
: For(I, 1, 3): L„(I+3)üL†(I+6): End
: prgmZVECPROD: 3üdi m L†: L†/ðsum (L†ð)üL†
: {3, 3}üdi m >[A]: {3, 1}üdi m [B]
: For(I, 1, 3): L (I)ü[B](I, 1): üL„(I)ü[A](I, 1): Lf(I)ü[A](I, 2):
üL†(I)ü[A](I, 3): End
: If det [A]=0: Then: Di sp "FEHLER -
STOP": Stop: El se: [A]ñ[B]ü[B]: For(I, 1, 3): L„(I)+[B](1, 1)L„(I+3)
üL„(I): L„(I)+[B](2, 1)L„(I+3)üLf(I): End: If
[B](3, 1)=0: Then: Di sp "GEM. SCHNITTPKT.", L„: El se: Di sp
"FUSSPKTE. L„, Lf", L„, Lf, "ABST.", abs ([B](3, 1)): End
: End: End: Goto F
    
```

```

: Lbl C9
    
```

8 Unterprogramm "Abstand Gerade-Gerade"

Eingabe zweier Geraden  $g_1 = L_4$  und  $g_2 = L_5$  in der Form  $g_1: \vec{x} = \vec{x}_0 + S \cdot \vec{x}_r$  und  $g_2: \vec{y} = \vec{y}_0 + T \cdot \vec{y}_r$ ; Überprüfung der Lagebeziehung der beiden Geraden (Parallelität, gemeinsamer Schnittpunkt) und Ausgabe (Berechnung) des Abstandes;

Lösungsweg für windschiefe Geraden

Unterscheidung der Fälle:

Geraden sind identisch (  $(\vec{x}_r \vec{y}_r)^2 = \vec{x}_r^2 \cdot \vec{y}_r^2$  und  $(\vec{x}_r \vec{x}y_0)^2 = \vec{x}_r^2 \cdot \vec{x}y_0^2$  )

Geraden sind parallel (  $(\vec{x}_r \vec{y}_r)^2 = \vec{x}_r^2 \cdot \vec{y}_r^2$  )

Vorgehen wie bei der Berechnung des Abstandes Punkt – Gerade

Geraden sind windschief

Bestimmung des zu den Richtungsvektoren der Geraden senkrechten Vektors durch Berechnung des Kreuzproduktes und nachfolgendes Lösen des entstehenden Gleichungssystems. Damit erfolgt die Angabe der Lotfußpunkte und des Abstandes.

Der explizite Lösungsweg scheint wenig praktikabel:

aus (I)  $\vec{x}y \perp \vec{x}_r$ , (II)  $\vec{x}y \perp \vec{y}_r$  und (III)  $\vec{x}y = \vec{x}_0 - \vec{y}_0 + S \cdot \vec{x}_r - T \cdot \vec{y}_r$  folgt

$$(I) \quad \vec{x}y \cdot \vec{x}_r = \vec{x}y_0 \vec{x}_r + S \cdot \vec{x}_r^2 - T \cdot \vec{x}_r \vec{y}_r = 0 \quad \text{und} \quad (II') \quad \vec{x}y \cdot \vec{y}_r = \vec{x}y_0 \vec{y}_r + S \cdot \vec{x}_r \vec{y}_r - T \cdot \vec{y}_r^2 = 0$$

, durch Lösung des Gleichungssystems folgt

$$(IV) \quad T = \frac{\vec{x}y_0 \vec{x}_r \vec{x}_r \vec{y}_r - \vec{x}y_0 \vec{y}_r \vec{x}_r^2}{(\vec{x}_r \vec{y}_r)^2 - \vec{x}_r^2 \cdot \vec{y}_r^2} \quad \text{und} \quad (V) \quad S = \frac{T \cdot \vec{x}_r \vec{y}_r - \vec{x}y_0 \vec{x}_r}{\vec{x}_r^2}$$

9 Unterprogramm "Abstand Punkt-Ebene"

```
: Cl rHome
: I f S0: Then: Di sp
"SPI EGELUNG": El se: Di sp
"ABSTAND": End: Di sp "PUNKT-
EBENE", ""
```

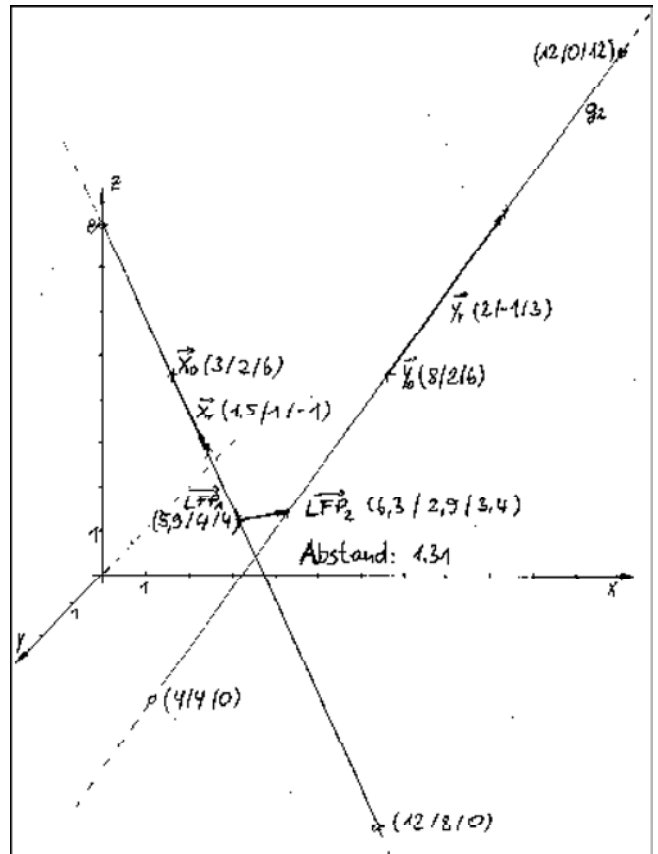


Abbildung 38

```
: prgmZEPKTLI S: LtüL : prgmZEINGEBE: Lt(4)üLf(1): Lt(5)üLf(2): Lt
(6)üLf(3): Lt(7)üL„(1): Lt(8)üL„(2): Lt(9)üL„(3): LtüL, : 3üdi m
L, : prgmZVECPROD: LtüL...: 3üdi m L...: L.../ösum (L...ö)üL...: sum L L...-
sum L, L...üX: L -XL...üL,
: Di sp "ABST PKTüEBENE", X, "LOTFUSSPKT L, ", L,
: I f S0: Then: L -2XL...üLf: Di sp "SPI EGELPUNKT Lf", Lf: End
: Goto F
```

```
: Lbl B10
: Cl rHome: I f S0: Then: Di sp "SPI EGELUNG": El se: Di sp
"ABSTAND": End: Di sp "PUNKT-
GERADE", "" : prgmZEPKTLI S: LtüL : prgmZEINGGER: LtüL, : 3üdi m
L, : Lt(4)üL„(1): Lt(5)üL„(2): Lt(6)üL„(3): L, +L„üLf: L -L, üL...
: sum (L...L„)/(sum (L„,ö))üR: L, +RL„üL...
: Di sp "LOTFUSSPKTUNKT L...", L...: I f S0: Then: 2L...-L üLt: Di sp
```

Eingabe Punkt  $L_1$  und Ebene  $L_2$ . Gesucht Abstand und Lotfußpunkt; Lösungsweg: Berechnung des Vektorproduktes  $L_5$  der Ebene  $L_6 = L_2$ , Normierung des Vektors  $L_5$  und Aufsuchen des Lotfußpunktes  $L_3$  durch Lösung des Gleichungssystems.

#### 10 Unterprogramm "Abstand Punkt-Gerade"

Eingabe Punkt  $L_1$  und Gerade (Punkt  $L_2$  und Richtung  $L_3$ ); Gesucht Lotfußpunkt  $L_4$  (siehe **Abbildung 1**); Lösungsweg: Gleichungssystem aus (I):  $(\vec{L}_4 - \vec{L}_1) \cdot \vec{L}_3 = 0$  und (II):  $\vec{L}_4 = \vec{L}_2 + S \cdot \vec{L}_3$  ergibt

(III):  $(\vec{L}_2 - \vec{L}_1) \cdot \vec{L}_3 + S \cdot (\vec{L}_3)^2 = 0$  und (IV):  $S = \frac{(\vec{L}_2 - \vec{L}_1) \cdot \vec{L}_3}{L_3^2}$ , es folgt  $L_4$  aus (II) und  $A =$

$|L_1 L_4|$ .

"SPIEGELPUNKT Lt", Lt: Else: sum ((L...-L )ò)üA: Di sp "ABST. ò  
 PúG", A, "ABST. PúG", ðA: End: Goto F

: Lbl F

## Verwendung von Variablen, Listen und Matrizen

Bei der Ausführung des Programms werden die Variablen X, Y, Z mit Sicherheit neue Werte erhalten, andere Variablen, wie z. B. W, können sich ändern. Listen werden fast alle überschrieben und bei der Berechnung von Abständen verwende ich die Matrizen A, B und C.

## Verwendung der Label:

Label	Menü	Unterprogramm	Aufgabenbereich
A	»		<b>Abstände</b>
B		»	Abstand Punkt-Gerade
C		»	Abstand Punkt-Ebene
D		»	Abstand Gerade-Gerade
E		»	Abstand Gerade-Ebene
F			<b>Ende</b> des Hauptprogramms
G	»		<b>Schnittwinkel</b>
H		»	Schnittwinkel Ebene-Ebene
I		»	Schnittwinkel Gerade-Ebene
J		»	Schnittwinkel Richtung-Richtung
K		»	<b>Vektorprodukt</b>
L		»	<b>Dreieck</b>
M		»	<b>Ebenengleichungen</b>
N	»		<b>Spiegelung</b>
O			
P		»	Abstand Punkt-Punkt
Q		»	Punktspiegelung Punkt
R		»	Spiegelung Punkt an Gerade
S		»	Spiegelung Punkt an Ebene
T			
U			
V			
W			
X			

Label	Menü	Unter- pro- gramm	Aufgabenbereich
Y			
Z			