Stichwortverzeichnis

Quellenangabe

VuW	Weber, Grit: *Stochastik*; Volk und Wissen Verlag GmbH Berlin 1992; 1. Auflage ISBN 3-06-000917-1
Barth	Barth
Encarta	*Microsoft® Encarta® Enzyklopädie 2001*. © 1993-2000 Microsoft Corporation. Alle Rechte vorbehalten.
Fisz	Fisz
Schwan	Schwan
Paetec	*Themenarbeitsheft für die Sekundarstufe I – Stochastik*; paetec Gesellschaft für Bildung und Technik mbH Berlin 1997; ISBN 3-89517-190-5
Oldenbourg	Bock H., Walsch W.: *Mathematik – Stochastik*. 1. Auflage München, R. Oldenbourg Verlag GmbH 1993 ISBN 3-486-13029-3

Internet

GaltonBrett http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Galton_Box.svg 15.11.08

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Einleitung

Dieser Text ist entstanden, um Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 12 die Wiederholung des Stoffs vorangegangener Jahre zu erleichtern. Neben vielen Übungsaufgaben finden sich auch Erklärungen zu wichtigen Begriffen. Alle angegebenen Lösungswege sind lediglich Vorschläge zur Lösung der Aufgaben.
Dies ist Version 1.7 des Textes mit Stand: 13. April 2010. Der Text ist leider noch unvollständig und wird im Laufe der Zeit ergänzt.
Eine Version im PDF-Format, die sich besonders gut für das Drucken eignet, findet sich unter dem Eintrag „Materialien für den Unterricht" auf dem Sächsischen Schulserver http://www.sn.schule.de/~matheabi. Fragen zum Text, Hinweise auf Fehler oder Ähnliches teilen Sie mir bitte unter mailto:mathe@gymnasium-delitzsch.de mit.

Grundbegriffe

Alle möglichen **Ergebnisse** ω eines Vorgangs mit zufälligem Ergebnis zusammen ergeben die **Ergebnismenge** Ω. Ein Zufallsexperiment kann unterschiedliche Ergebnismengen haben, je nach dem unter welchen Gesichtpunkten es betrachtet wird.

Oft interessiert man sich für das Eintreten bestimmter **Ereignisse**. Ereignisse sind Aussagen über die Ergebnisse eines Vorgangs. Sie werden als Teilmenge von Ergebnissen notiert.

1. Es werden ein roter und ein blauer Würfel geworfen. Beschreiben Sie folgende Ereignisse, indem Sie alle möglichen Augenpaare aufzählen, die für das entsprechende Ergebnis günstig sind! Schreiben Sie dabei jeweils zuerst die Augenzahl des roten Würfels!
   A: Beide Würfel zeigen die gleiche Augenzahl an.
   B: Die Augenzahl des roten Würfels ist ein Teiler der Augenzahl des blauen Würfels.
   C: Die Augensumme ist eine Primzahl.
   D: Die Augensumme ist 6.
   E: Das kleinste gemeinsame Vielfache der Augenzahlen ist größer als 9.
   F: Der größte gemeinsame Teiler der Augenzahlen ist 3.
   Quelle: VuW – Lösung: A
2. Axel, Werner, Thomas und Paul wollen Tischtennis spielen. Es sind aber nur 2 Kellen vorhanden. Sie können sich nicht einigen, wer zuerst spielen darf und losen deshalb.
   a) Schreiben Sie die Ergebnismenge dieses Losens auf, indem Sie alle möglichen Paare aufstellen, wie das erste Match besetzt sein könnte!
   b) Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse!
   A: Thomas spielt im ersten Match.
   B: Paul spielt nicht zuerst.
   C: Thomas spielt zuerst und Paul nicht. Quelle: VuW – Lösung: A
3. Beim "Mensch-ärgere-Dich-nicht" darf man mit seiner Figur nur starten, wenn man innerhalb von drei Würfen eine 6 würfelt.
   Man könnte also nach den Folgen 5-6 oder 3-1-6 sein Steinchen auf das Feld setzen.
   Geben Sie alle "erfolgreichen" Zahlenfolgen an! Quelle: VuW - Lösung: K - A

Sichere Ereignisse werden durch den Buchstaben Ω selbst dargestellt, d. h. jedes mögliche Ergebnis ist im sicheren Ereignis enthalten.

Unmögliche Ereignisse enthalten kein mögliches Ergebnis. Deshalb stellt man sie durch die leere Menge $\varnothing$ dar.

Ereignisse, die genau ein Ergebnis umfassen, heißen **Elementarereignisse**.

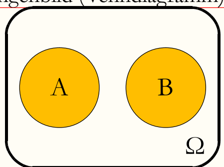
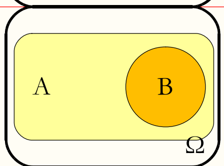
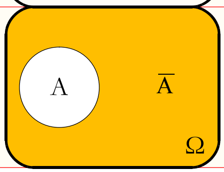
4. Welche der folgenden Ereignisse sind "unmöglich", "sicher" bzw. "möglich, aber nicht sicher" ?

A: Aus einer Urne, in der sich nur rote Kugeln befinden, wird eine rote Kugel gezogen.
B: Von den 8 Familienmitgliedern der Familie Kluge hat jedes an einem anderen Wochentag Geburtstag.
C: Ein Würfel wird geworfen, und die Augensumme ist kleiner als 10.
D: Die Schüler Ihrer Klasse können sich so aufstellen, dass immer ein Mädchen neben einem Jungen steht.
E: Ein Kind hat zwei Geschwister.
F: Ein Kind hat Mutter und Vater.
G: Geben Sie selbst Beispiele für sichere und für mögliche Ereignisse an!Quelle: VuW - Lösung: K

Zu jedem Ereignis A gibt es ein **entgegengesetztes Ereignis** $\overline{A}$.
Das Ereignis $\overline{A}$ tritt ein, wenn A nicht eintritt.
Eine Mengendarstellung erhält man, indem man die Elemente des Ereignisses A aus der Ergebnismenge Ω streicht.

5. Nennen Sie für folgende Ereignisse die entgegengesetzten Ereignisse!
A: In einer Familie mit 5 Kindern gibt es mindestens 3 Mädchen.
B: Beim Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit 2 weißen, 3 schwarzen und 4 roten Kugeln wird eine weiße Kugel gezogen.
C: Bei 3 Schüssen auf eine Zielscheibe werden 3 Treffer erzielt.
D: Bei 5 Schüssen auf eine Zielscheibe werden nicht mehr als 2 Treffer erzielt.
E: Das Eis kostet weniger als 4,- €, aber mehr als 2,- €.
F: Beim Roulette wird eine Zahl aus der mittleren Längsreihe gezogen.
G: In keinem dieser Bücher gibt es weniger als 3 Druckfehler.
H: Nadine hat einen Bruder.
I: Ich gewinne immer dieses Spiel. Quelle: VuW - Lösung: K

Mengenverknüpfungen

Mengenbild (Venndiagramm)	Symboldarstellung	Sprechweisen
	$A \cap B = \emptyset$	Die Ereignisse A und B sind **unvereinbar**. A und B können nicht gleichzeitig eintreten.
	$B \subset A$	Das Ereignis B zieht A nach sich. B ist Teilereignis von A. Immer, wenn B eintritt, tritt auch A ein.
	$\overline{A}$	$\overline{A}$ ist das Gegenereignis von A. Das Gegenereignis tritt ein, wenn das Ereignis nicht eintritt.

d) Man beurteile das Verfahren, wenn 3 Kinder um 1 großen und 2 kleine Apfel losen.(Zitat BARTH S. 225 Nr. 15)

15. Eine Münze werde 5mal geworfen. Treffer sei das Auftreten von Adler. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Ergebnis
a) mindestens 4mal nacheinander Treffer oder mindestens 4mal nacheinander Nieten,
b) mindestens 3mal nacheinander Treffer oder mindestens 3mal nacheinander Nieten enthalten? (Zitat BARTH S. 225 Nr. 17)

16. Ein Laplace-Würfel werde so lange geworfen, bis eine Sechs erscheint.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Sechs frühestens beim 4. mal auftritt?(Zitat BARTH S. 225 Nr. 19 teilweise)

17.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dem ersten Treffer genau k Nippten vorausgehen? Stelle die Wahrscheinlichkeiten für p=0,25 und k=0,..,10 graphisch dar.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint der 1. Treffer erst beim k-ten Wurf oder noch später? (Zitat BARTH S. 225 Nr. 20)

ßendes Beispiel führt er aus, dass sich die Einsätze wie 753571 : 9324125 ≈ 1 : 12 verhalten müssen, wenn man fair darauf wetten wollte, dass bei 3 aufeinanderfolgenden Würfen mit 3 Würfeln jedes Mal wenigstens ein Würfel die Eins zeigt. Weise die Richtigkeit beider Behauptungen nach.(Zitat BARTH S. 223 Nr. 3)

8. Zur Entscheidung eines Problems werden 5 Experten befragt, die sich unabhängig voneinander äußern. Jeder Experte beurteilt das Problem mit 80% Sicherheit richtig.
   a) Stelle das Experiment als Bernoulli-Kette dar. Was bedeutet "Treffer beim i-ten Versuch"? Wie groß sind die Länge n und der Parameter p?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit
      - urteilen genau der erste und der dritte Experte richtig,
      - urteilen alle Experten richtig,
      - erhält man kein richtiges Urteil,
      - erhält man wenigstens ein richtiges Urteil?
   c) Wie viele Experten müsste man mindestens befragen, um mit mehr als 99% Sicherheit mindestens ein richtiges Urteil zu erhalten.
   (Zitat BARTH S. 223 Nr. 4)
9. Eine Personenmenge ("Bevölkerung", "Population") bestehe zu 40% aus Frauen und zu 60% aus Männern. Es wird 5mal jemand ausgewählt und notiert, ob es ein Mann oder eine Frau ist. (Stichprobe vom Umfang 5, mit zurücklegen.) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man
   a) keinen Mann,
   b) wenigstens 1 Mann,
   c) genau 1 Mann,
   d) nur Männer?
   (Zitat BARTH S. 223 Nr. 5)
10. Ein Gerät besteht aus 10 Bausteinen, die unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit p ordnungsgemäß arbeiten. Fällt auch nur ein Baustein aus, so ist das Gerät gestört. Wie groß muss p sein, damit das Gerät mit 90% Sicherheit arbeitet?
   (Zitat BARTH S. 224 Nr. 7)
11. Ein elektronisches Gerät besteht aus 13 Baugruppen. Fällt auch nur eine davon aus, ist es unbrauchbar. Man weiß, dass für jede Baugruppe die Wahrscheinlichkeit, während 1jährigen Betriebs auszufallen, 0,26% beträgt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gerät im Laufe eines Jahres repariert werden muss?
   (Zitat BARTH S. 224 Nr. 8)
12. Eine Maschine erzeugt Metallteile, 5% davon sind unbrauchbar. Wie viele Teile muss 9 man wenigstens nehmen, damit man mit mindestens 50% Wahrscheinlichkeit mindestens ein defektes dabei hat? (Bernoulli-Kette annehmen!)(Zitat BARTH S. 224 Nr. 9)
13. Eine Stadt wird von 4 Kraftwerken versorgt. Es sind 2 Wasser- und 2 Dampfkraftwerke. Bei Gewitter besteht für jede der 4 zugehörigen Hochspannungsleitungen einzeln die Wahrscheinlichkeit p, dass sie sich wegen Blitzschlag automatisch abschaltet. Im Notfall können 2 Kraftwerke die Stadt gerade noch versorgen; es muss jedoch ein Dampfkraftwerk dabeisein.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bricht bei Gewitter die Stromversorgung der Stadt zusammen? Man zeichne diese Wahrscheinlichkeit als Funktion der "Abschaltewahrscheinlichkeit" p. Einheit = 10 cm. Man überzeuge sich durch Rechnung davon, dass die gezeichnete Funktion monoton steigt.
   b) Man zeichne die entsprechende Funktion wie in a), wenn die Stadt von 2 beliebigen Kraftwerken gerade noch versorgt werden kann.
   (Zitat BARTH S. 224 Nr. 12)
14. 4 Kinder losen um 4 Äpfel, 2 große und 2 kleine. Sie werfen der Reihe nach eine Münze. Wer "Adler" wirft, erhält einen großen Apfel, wer "Zahl" wirft, einen kleinen, bis nur noch große oder nur noch kleine Äpfel da sind.
   a) Ist das Verfahren gerecht, d. h., hat jedes die gleiche Aussicht, einen großen Apfel zu erhalten?
   b) Ist es für je 2 von ihnen gleich wahrscheinlich, dass beide einen großen Apfel erhalten?
   c) Ist das Losverfahren gerecht, wenn es allgemein n große und n kleine Äpfel und 2n Kinder sind?

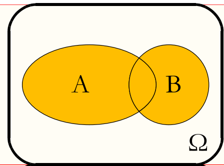
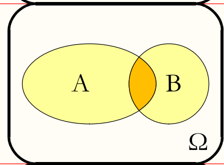
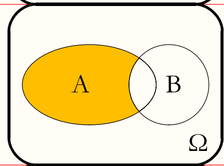
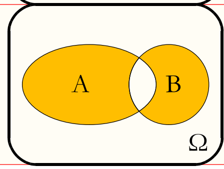
	A ∪ B	A oder B tritt ein. Eines er Ereignisse oder beide treten ein.
	A ∩ B	A und B tritt ein. Beide Ereignisse treten gleichzeitig ein.
	A\B	A minus B (A ohne B) tritt ein. A tritt ein und B tritt nicht ein.
	$(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$	Entweder A oder B tritt ein. Genau eines der beiden Ereignisse tritt ein. XOR

Tabelle 1

6. Ein Versuch bestehe im einmaligen Werfen eines Würfels.
   Dabei werden folgende Ereignisse betrachtet:
   A: eine 6 wird gewürfelt,
   B: eine ungerade Zahl wird gewürfelt,
   C: mindestens eine 4 wird gewürfelt,
   D: höchstens eine 3 wird gewürfelt,
   E: eine 2 oder eine 4 wird gewürfelt.

   Veranschaulichen Sie sich diesen Sachverhalt mit einem Venndiagramm, und beantworten Sie die folgenden Fragen!

   a) Welches ist das Gegenereignis zu C?
   b) Gibt es Ereignisse, die mit B kein Element gemeinsam haben? Quelle: VuW - Lösung: K - A
7. Anlässlich einer Befragung wird aus den in einer Stadt lebenden Ehepaaren willkürlich ein Ehepaar ausgewählt. Folgende Ereignisse werden betrachtet:
   A: Der Ehemann ist älter als 40 Jahre.
   B: Der Ehemann ist älter als die Ehefrau.
   C: Die Ehefrau ist älter als 40 Jahre.
   Beschreiben Sie die Ereignisse A ∪ B, A ∩ B; A ∪ C und A ∩ C mit Worten!
   Quelle: VuW - Lösung: K
8. Es seien A und B beliebige Ereignisse. Überlegen Sie, unter welchen Bedingungen die folgenden Beziehungen gelten:
   a) A ∪ B = A,
   b) A ∪ B = $\overline{A}$,
   c) A ∩ B = A,
   d) A ∩ B = $\overline{A}$

e) $A \cup B = A \cap B$! Quelle: VuW - Lösung: K

9. Drei Pärchen gehen zur Tanzschule. Jeweils nach der Hälfte der Tanzstunde lässt der Tanzlehrer das Los entscheiden, welcher Junge mit welchem Mädchen tanzt, damit man sich nicht zu sehr auf seinen Partner "eintanzt". Unsere Pärchen wollen natürlich auch in der zweiten Hälfte der Tanzstunde miteinander tanzen und betrachten die Ereignisse A_1, A_2 bzw. A_3, dass das Pärchen 1, 2 bzw. 3 doch zufällig zusammen weiter tanzen kann, als Gewinn.
Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse mit Worten:
a) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$,
b) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$,
c) $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$,
d) $\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3}$,
e) $\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3\right)$ Quelle: VuW - Lösung: K

10. Haben die für die folgenden Vorgänge jeweils zwei der angegebenen Ereignisse gemeinsame Elemente?
a) Vorgang: Werfen einer Münze
Ereignisse: A_1: Zahl liegt oben.
A_2: Wappen liegt oben.
b) Vorgang: Werfen von zwei Münzen.
Ereignisse: B_1: Die erste Münze zeigt "Zahl".
B_2: Die zweite Münze zeigt "Wappen".
B_3: Beide Münzen zeigen "Wappen".
c) Vorgang: Zweimaliges Schießen auf eine Scheibe.
Ereignisse: C_1: Kein Treffer.
C_2: Genau ein Treffer.
C_3: Ein Treffer.
C_4: Zwei Treffer.
d) Vorgang: Ziehen von zwei Karten aus einem Skatspiel.
Ereignisse: D_1: Zwei Kreuz- oder zwei Pikkarten werden gezogen.
D_2: Ein As wird gezogen.
D_3: Eine Dame wird gezogen. Quelle: VuW - Lösung: K

11. Ein Schüler möchte Bohnen zum Keimen bringen und legt 4 Stück auf einen Teller unter einen feuchten Wattebausch. Es werden die folgenden Ereignisse beobachtet:
A: Genau eine der 4 Bohnen keimt.
B: Mindestens eine Bohne keimt.
C: Zwei oder mehr Bohnen keimen.
D: Genau zwei Bohnen keimen.
E: Genau drei Bohnen keimen.
F: Alle vier Bohnen keimen.
Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse mit Worten:
a) $A \cup B$,
b) $B \cup C$,
c) $D \cup E \cup F$,
d) $A \cap B$,
e) $B \cap C$! Quelle: VuW - Lösung: K

12. Es werden drei Maschinen auf Funktionstüchtigkeit überprüft. Es sei A_i das Ereignis "Die i-te Maschine ist defekt".
Stellen Sie folgende Ereignisse durch eine Verknüpfung der Ereignisse A_i dar:
A: Alle drei Maschinen sind defekt.
B: Keine Maschine ist defekt.
C: Wenigstens eine Maschine ist defekt.
D: Wenigstens eine Maschine ist intakt.

Weitere Aufgaben

2. In einem Wasserwerk werden regelmäßig Proben entnommen und auf das Vorhandensein von Inhaltsstoffen untersucht. Ein wesentlicher Kennwert für die Wasserqualität ist die Nitratkonzentration. Für sie ist ein Grenzwert von 50 mg/l gesetzlich festgelegt. Wird dieser Wert überschritten, so ist zu entscheiden, ob Wasser in das öffentliche Trinkwassernetz eingespeist werden kann oder nur in die Brauchwasserversorgung. Der Gesetzgeber hat den Grenzwert bewusst sehr niedrig angesetzt, um eine Gefährdung der Bevölkerung auszuschließen. Der Genuss des Wassers ist erst bei einer vielfachen Überschreitung dieses Grenzwertes kritisch.
Im Wasserwerk ist bekannt, dass drei Viertel der abgegebenen Wassermenge einen Nitratgehalt unterhalb des Grenzwertes hat.
Wir wollen die Situation unter verschiedenen Gesichtspunkten betrachten und nach Antworten auf die folgenden Fragen suchen:
a) Es sind 20 Proben entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Probengesamtheit repräsentativ, d.h. mit welcher Wahrscheinlichkeit ist in 5 der Proben der Grenzwert überschritten?
b) Wie kommt man zu der Information, dass drei Viertel des Wassers eine Nitratkonzentration unterhalb des Grenzwertes hat?
c) Welche mathematisch begründbaren Schlussfolgerungen hat man zu ziehen, in einer 20 Einzelproben umfassenden Serie zehn Proben einen Nitratgehalt oberhalb des Grenzwertes aufweisen? (Quelle: Oldenbourg S. 107)

3. Diverse Aufgaben zur Zuverlässigkeit von technischen Systemen zum Beispiel Reihen- und Parallelschaltungen ab S. 40 Volk und Wissen.
(Zitat: Volk und Wissen S. 42 ff)

4. In einer Urne befinden sich Lose zweierlei Art, etwa Gewinne (E) und Nieten ($\overline{E}$). Für die Anteile der beiden Losarten gilt: $p = \frac{m}{n} = P(E)$ und $q = 1 - p = 1 - \frac{m}{n} = P(\overline{E})$. Die Lose müssen dann jeweils wieder in die Urne zurückgelegt werden, damit die einzelnen Ziehungen voneinander unabhängig sind. Dann ist z. B. bei zweimaligem Ziehen die Gewinnwahrscheinlichkeit gegeben durch $P(E)\cdot P(E)=p^2$.
(Zitat Schwan S. 189 Nr. 2.1.)

5. Ein Modell für eine Bernoulli-Kette ist ein Glücksrad mit zwei Feldern E und $\overline{E}$, das n-mal gedreht wird; die Grase der Felder ist so eingerichtet, dass $P(E)$=p und $P(\overline{E})$=1-p ist, z. B. p = 0,15 und q = 0,85.(Zitat Schwan S. 189 Nr. 2.2.)

6. Das Banachsche Problem
Ein Mathematiker trägt zwei Streichholzschachteln bei sich, von denen jede ursprünglich n Streichhölzer enthielt. Jedes Mal, wenn er sich eine Zigarette anzündet, wählt er eine Streichholzschachtel zufällig aus. Man berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei eventueller Auswahl einer bereits leeren Schachtel in der anderen Schachtel noch r Streichhölzer vorhanden sind, r = 0, 1, ... , n.[15]
(Zitat Fisz S. 46 Nr. 14)

7. Gerolamo Cardano (1501-1576)
a) Cardano behauptet zu Beginn von Kapitel XV seines Liber de ludo aleae (um 1564), dass sich bei einer fairen Wette die Einsätze wie 1:(n2 - 1) verhalten müßten, wenn man darauf wetten wollte, bei n Würfen mit zwei Würfeln jedes Mal eine gerade Augensumme zu erhalten. Was meinst du dazu?
b) Gegen Ende desselben Kapitels kommt Cardano zur Erkenntnis, dass sich bei n aufeinander folgenden Versuchen die Einsätze wie an:(bn-an) verhalten müssen, wenn a die Anzahl der günstigen Fälle und b die Anzahl aller möglichen Fälle im Einzelversuch bedeuten. Als abschlie-

[15] Es ist anzumerken, dass die Anzahl der verbleibenden Streichhölzer nicht Null sein sollte (r≠0), da ja sonst diese Schachtel zuerst leer gewesen wäre und nicht die andere Schachtel. Vergleiche dazu auch .

Gewinn	Anteil	Wahrscheinlic	Anzahl	Auszahlung	total	math. Auszahlu	60MioAuszahlung			Durchschnitt
I	10%	7,1511E-09	3	1.329.067,20 €	2.780.546,81 €	926.848,94 €	0,43 €	6 Richtige + Superzahl		5.243.931,00 €
II	8%	7,1511E-08	6	370.739,50 €	2.224.437,45 €	370.739,58 €	4,29 €	6 Richtige		466.127,20 €
III	5%	5,0058E-07	47	29.580,20 €	1.390.273,41 €	29.580,29 €	30,03 €	5 Richtige + Zusatzzahl		43.699,40 €
IV	13%	1,8450E-05	1.965	1.839,50 €	3.614.710,86 €	1.839,55 €	1.106,99 €	5 Richtige		2.705,20 €
V	2%	6,3073E-05	4.060	136,90 €	556.109,36 €	136,97 €	3.784,37 €	4 Richtige + Zusatzzahl		166,40 €
VI	10%	9,6862E-04	84.632	32,80 €	2.780.546,81 €	32,85 €	58.117,18 €	4 Richtige		40,60 €
VII	8%	2,1550E-03	110.396	20,10 €	2.224.437,45 €	20,15 €	129.299,47 €	3 Richtige + Zusatzzahl		24,30 €
VIII	44%	1,7650E-02	1.432.188	8,50 €	12.234.405,98 €	8,54 €	1.059.024,23 €	3 Richtige		10,00 €
		9,7914E-01	72.514.618							
	100%						1.251.367,01 €			
	E(X)	0,40%		28.940.826,70 €		0,32 €			E(x)	0,42 €
			74.147.915	55.610.936,25 €			60.000.000,00 €			
			Ausschüttung	52,04%						

Tabelle 5:

E: Mindestens zwei Maschinen sind defekt.
F: Nicht mehr als eine Maschine ist defekt.
G: Nur die erste Maschine ist defekt! Quelle: VuW - Lösung: K

13. In einem Sanatorium beträgt der Anteil der Kurgäste mit Diabetes 40% und der mit zu hohem Blutdruck 50%. 30% der Kurgäste haben keine der beiden Krankheiten. Wie groß ist der Anteil derer, die beide Krankheiten haben? Quelle: VuW - Lösung: K

14. Bei einer Reihenuntersuchung werden viele Personen auf Lungenkrebs hin untersucht. Es interessieren folgende Ereignisse:
A: Die untersuchte Person hat Lungenkrebs.
B: Die untersuchte Person ist Raucher.
Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse verbal, und schraffieren Sie jeweils in einem Venndiagramm die entsprechende Fläche!
a) $A \cap B$
b) $\overline{A \cap B}$
c) $A \cup B$
d) $\overline{A \cup B}$
e) $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$. Quelle: VuW - Lösung: K

15. Bei Bergleuten mit 10jähriger Berufspraxis betrage der Anteil der an Silikose erkrankten Personen 40%, der an Bronchitis erkrankten 70% und der Personen, die an beiden Krankheiten gleichzeitig leiden müssen, 30%. (Silikose ist eine krankhafte Veränderung der Lunge durch Quarzstaub.)
Wie groß ist der Anteil der Personen dieser Gruppe, die keine der beiden Krankheiten haben?
Quelle: VuW - Lösung: K

Statistische Erhebungen

Wird ein Zufallsexperiment sehr oft durchgeführt, dann stabilisieren sich für jedes Ergebnis die relativen Häufigkeiten für das Auftreten dieses Ergebnisses, sie pendeln sich um einen bestimmten Wert ein. Der Wert, um den sich die relativen Häufigkeiten für ein Ergebnis einpegeln, nennt man die **Wahrscheinlichkeit** dieses Ergebnisses.

Darstellungsmöglichkeiten für Häufigkeitsverteilungen

Beispiel: Lehrer Müller korrigiert die Mathearbeit seiner Klasse und notiert die Zensuren in einer

- Urliste: 3 4 2 2 3 5 2 3 3 1 4 4 6 5 3 2 1 2 4 3 3 5 2 3 2
  Zensuren $z_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit $1 \le i \le 25$
- Strichliste:

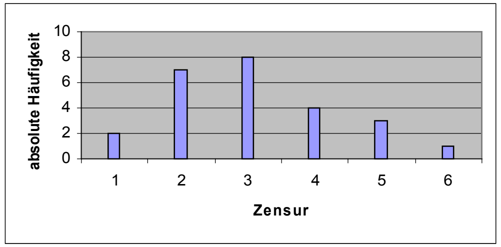
1	2	3	4	5	6
II	IIIII II	IIIII III	IIII	III	I

- Tabelle mit absoluter und relativer Häufigkeit[1]

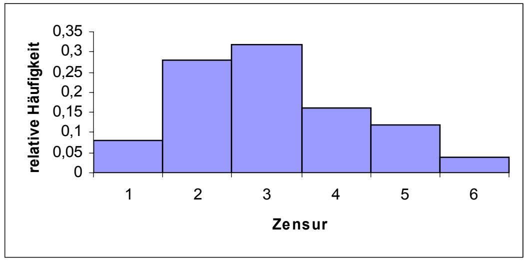
Zensuren z	1	2	3	4	5	6
H_{25} (z)	2	7	8	4	3	1
h_{25} (z)	2/25	7/25	8/25	4/25	3/25	1/25

- Stabdiagramm

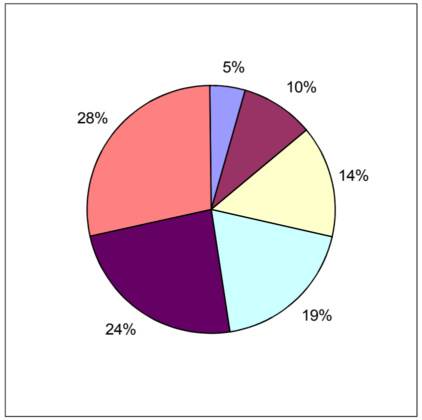
[1] Es gilt: $h_n(x) = \frac{H_n(x)}{n}$. Außerdem gilt auch $\sum_x H_n(x) = n$ und $\sum_x h_n(x) = 1$.



- Säulendiagramm

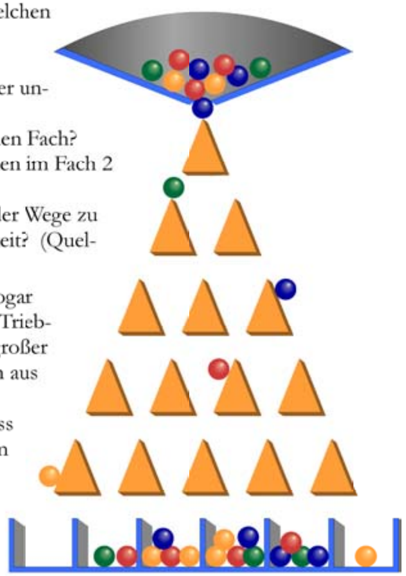


- Kreisdiagramm



- Blockdiagramm

lichkeit!
Stellen Sie die Ergebnisse im Streckendiagramm dar und diskutieren Sie darüber!
(Quelle: VuW - Lösung: K)



62. Auf einem Galton-Brett rollen nacheinander 25 Kügelchen über ein Hindernisfeld. Bei jedem Hindernis rollen die Kügelchen entweder nach rechts oder nach links und fallen schließlich in die dafür vorgesehenen Fächer unterhalb des Galton-Brettes.
Wie viele verschiedene Wege führen zu jedem einzelnen Fach?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kügelchen im Fach 2 liegen bleibt?
Gibt es einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Wege zu einem Fach und der entsprechenden Wahrscheinlichkeit? (Quelle: VuW - Lösung: K)
63. Ein Düsenflugzeug hat 4 Triebwerke. Es kann aber sogar noch fliegen, wenn nur ein Triebwerk arbeitet, also 3 Triebwerke ausgefallen sind. Jedes Triebwerk arbeitet mit großer Zuverlässigkeit und fällt nur in einem von 1000 Fällen aus wenn der Flug 8 Stunden nicht überschreitet.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass das Flugzeug bei einem 8-Stunden-Flug mit nur einem Triebwerk auskommen muss! (Quelle: VuW - Lösung: K)
64. Die Ausschussrate bei der Herstellung von 60 W-Glühlampen beträgt 1%. Was ist wahrscheinlicher, unter 25 wenigstens eine defekte Glühlampe zu finden oder dass bei 15 zufällig ausgewählten Glühlampen alle in Ordnung sind?(Quelle: VuW - Lösung: K)
65. Auf einer Tüte mit Saatgut steht, dass bei Einhaltung der Hinweise 80% der Samen aufgehen werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird wenigstens eins von 10 gesäten Samenkörnern aufgehen?
(Quelle: VuW - Lösung: K)
66. Einem Posten von 100 Teilen werden "auf gut Glück" 10 Teile zur Qualitätskontrolle entnommen. Der Hersteller hat sich zu höchstens 5% Ausschuss verpflichtet. Der Posten wird abgelehnt, wenn mindestens ein defektes Teil in der Stichprobe ist.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Posten abgelehnt, wenn der vereinbarte Ausschussanteil gerade noch eingehalten wird?
   b) Wie verändern sich die eben berechneten Wahrscheinlichkeiten, wenn der Posten in Wirklichkeit 10% defekte Teile enthält?
   c) Wie verändern sich die eben berechneten Wahrscheinlichkeiten, wenn der Posten höchstens ein defektes Teil enthalten darf, um angenommen zu werden? (Quelle: VuW - Lösung: K)
67. Eine Operation habe 80% Aussichten auf Erfolg. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 4 der nächsten 5 Patienten erfolgreich operiert werden?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der fünfte Patient erfolgreich operiert wird, wenn die vier Patienten vor ihm eine erfolgreiche Operation hatten? (Quelle: VuW - Lösung: K)
68.

Binomialverteilung

muss noch ergänzt werden

BERNOULLI-Experimente[9]

Ein BERNOULLI-Versuch ist ein spezielles LAPLACE-Experiment. Er hat nämlich nur zwei mögliche Ereignisse.

So ist z. B. das einmalige Würfeln ein LAPLACE-Experiment, aber noch kein BERNOULLI-Experiment, denn es können ja sechs verschiedene Ergebnisse betrachtet werden. Würde man aber nur darauf achten, ob ein Sechs fällt oder nicht, dann hätte man nur zwei mögliche Ausgänge und somit ein BERNOULLI-Experiment.

56. Nennen Sie andere BERNOULLI-Experimente.
57. In einer Urne liegen eine rote und drei schwarze Kugeln. Man zieht dreimal je eine Kugel. Treffer A_i sei das Ziehen der roten Kugel beim i-ten Zug. Offenbar ist sowohl beim Ziehen mit Zurücklegen wie auch beim Ziehen ohne Zurücklegen $P(A_i) = ¼$ für i = 1, 2, 3. Eine Bernoulli-Kette liegt jedoch nur beim Ziehen mit Zurücklegen vor.
    a) Begründen Sie die letzte Behauptung; indem Sie mit Hilfe eines Baums die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für das Ziehen mit bzw. ohne Zurücklegen erstellen.
    b) Zeigen Sie, dass beim Ziehen ohne Zurücklegen A_1 und A_2 stochastisch abhängig sind.
    (Quelle: Barth)

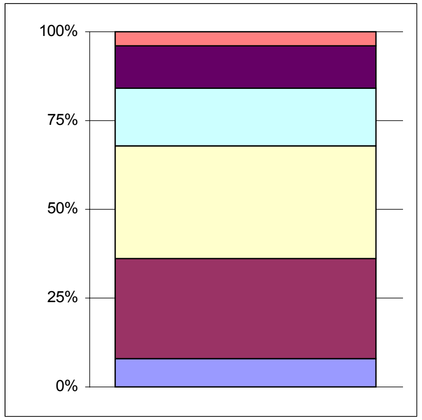
BERNOULLI-Kette

Wiederholt man einen BERNOULLI-Versuch ein- oder mehrmals und beeinflusst das Ergebnis des einen Versuches nicht das des anderen Versuches, so entsteht eine BERNOULLI-Kette.

58. Wenn wir mehrmals nacheinander mit der Münze werfen[10], entsteht also eine BERNOULLI-Kette. Warum ist es keine solche Kette, wenn wir mehrmals aus einem Lostopf ziehen und notieren, ob ein Gewinn erzielt wurde oder nicht?
    Nennen Sie weitere Experimente, die zur Entstehung (oder nicht Entstehung) einer BERNOULLI-Kette führen. Lösung: K
59. Beim Mensch-ärgere-dich-nicht darf man dreimal würfeln. Wenn dabei eine 6 gewürfelt wird, darf man eine Figur auf das Spielfeld setzen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man schon in der ersten Runde starte? (Quelle: VuW - Lösung: K)
60. In einer Urne befinden sich 3 rote und 7 weiße Kugeln. Viermal hintereinander wird folgender Versuch durchgeführt: Es wird eine Kugel gezogen, die Farbe notiert und schließlich wieder zurückgelegt.
    Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ergebnisse:
    a) Erst werden 2 rote, dann 2 weiße Kugeln gezogen.
    b) Erst werden 2 weiße, dann 2 rote Kugeln gezogen.
    c) Die ersten 3 Kugeln sind rot, die vierte ist weiß.
    d) Die ersten 3 Kugeln sind rot.
    e) 2 der 4 Kugeln sind rot. (Quelle: VuW - Lösung: K)
61. Bei einer Prüfung werden jedem Prüfling 10 Fragen gestellt. Zu jeder Frage sind 3 Antworten vorgegeben, von denen aber nur eine richtig ist. Nehmen wir an, ein Prüfling weiß überhaupt nichts und tippt jedes Mal, ohne zu überlegen, irgendeine Antwort.
    Berechnen Sie für jede mögliche Anzahl von richtigen Antworten die entsprechende Wahrschein-

[9] **Bernoulli, Jakob** (1654-1705), Schweizer Mathematiker und Physiker, geboren am 27. Dezember 1654 in Basel. Bernoulli stammte aus einer bedeutenden Gelehrtenfamilie und nahm auf Wunsch seines Vaters das Studium der Theologie auf. Seine besondere Aufmerksamkeit aber galt der Mathematik. Nach Beendigung des Studiums lehrte er als Privatdozent im europäischen Ausland und lernte dabei bedeutende Wissenschaftler seiner Zeit kennen. 1687 erreichte ihn die Berufung zum Professor für Mathematik an der Universität Basel. Bernoulli war einer der bedeutenden Mathematiker des 17. Jahrhunderts. Gemeinsam mit seinem Bruder Johann Bernoulli schuf er grundlegende Beiträge zur Theorie der Differentialgleichungen. Er erzielte wichtige Resultate auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung und gab entscheidende Anstöße zur Entwicklung der Variationsrechnung. 1744 wurden seine umfangreichen wissenschaftlichen Abhandlungen als Gesamtwerk herausgegeben. Jakob Bernoulli starb am 16. August 1705 in Basel. (Quelle: Encarta)

[10] Münzwurf hat immer nur zwei Ergebnisse. Auf dem Rand kann keine (mathematische) Münze stehen.



Kenngrößen

Mittelwert

Der durchschnittlich erreichte Wert; im Beispiel $\bar{z} = 3{,}08$. Allgemein gilt

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_x H_n(x)\cdot x}{n} = \sum_x h_n(x)\cdot x \,.$$

Zentralwert

Der Wert, der in der geordneten Urliste genau in der Mitte steht[2];
im Beispiel: Urliste: 1 1 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 6

Häufigster Wert oder Modalwert m

Der Wert, dessen absolute Häufigkeit am größten ist; hier m = 3.

Spannweite

Gibt die Intervallbreite an, aus dem die Werte stammen. Sie wird allerdings von den Extremwerten der Messgröße bestimmt; hier $z_{Min} = 1$ bis $z_{Max} = 6 \Rightarrow$ Spannweite 5.

Mittlere Abweichung

Verdeutlicht, inwiefern die Werte vom Mittelwert abweichen. Bei der Berechnung der Abweichung vernachlässigt man das Vorzeichen, d. h. ob der Wert größer oder kleiner ist, ist nicht von Belang.

Zensuren z_i	1	2	3	4	5	6
$H_{25}(z_i)$	2	7	8	4	3	1
Abweichung: $\lvert\bar{z}-z_i\rvert$	2,08	1,08	0,08	0,92	1,92	2,92

Mittlere Abweichung[3] $\Delta z = \overline{\lvert\bar{z}-z_i\rvert}$; hier $\Delta z = 0{,}9888$.

[2] Sollte der Zentralwert einer gerade Anzahl von Werten bestimmt werden, nimmt man den Mittelwert der beiden mittleren Werte.

[3] Wird als Mittelwert der Abweichungen betrachtet und in der Physik mit Δx bezeichnet. Bei der Berechnung des Mittelwertes ist die Häufigkeit des Auftretens der Einzelwerte zu beachten. Mit anderen Worten es ist der „gewichtete" Mittelwert zu berechnen.
Es ist immer ein positiver Wert. Gilt Δx = 0 so folgt daraus, dass alle Werte identisch mit dem Mittelwert sind. Ist z. B. beim Würfeln immer nur die 3 gefallen, so ist der Mittelwert 3 und die Abweichung vom Mittelwert 0, die mittlere Abweichung

Standardabweichung und Varianz

Die Varianz beschreibt die mittlere quadratische Abweichung $V(z) = \overline{(\bar{z} - z_i)^2}$ der Werte. Sie gibt damit an, wie stark die Streuung der Werte ist. Die Standardabweichung σ ist die Wurzel aus diesem Wert: $\sigma z = \sqrt{V(z)}$.

Zensuren z_i	1	2	3	4	5	6
$H_{25}(z_i)$	2	7	8	4	3	1
Abweichung: $(\bar{z} - z_i)^2$	4,3264	1,1664	0,0064	0,8464	3,6864	8,5264

Hier ist V(z) = 1,5936 und σ(z) = 1,2624.

Je kleiner die mittlere (lineare) Abweichung bzw. die mittlere quadratische Abweichung und damit die Standardabweichung ist, desto enger liegen die Einzelwerte um das arithmetische Mittel dieser Einzelwerte herum. Sie streuen also weniger.

16. Bei der Dichtebestimmung von Stahl fanden Schülergruppen die folgenden Messwerte (in g/cm³). Stellen Sie die Häufigkeitsverteilung grafisch dar, und vergleichen Sie diese.

Dichte	7,1	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,3
Häufigkeit	1	1	1	4	4	4	3	1

Gruppe 1

Dichte	7,3	7,4	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0	8,1	8,2	8,3
Häufigkeit	1	2	2	2	3	4	3	1	2	1

Gruppe 2

Welche Schülergruppe hat sorgfältiger gearbeitet? Genügt es, die Mittelwerte zu vergleichen?

Laplace-Versuche

Im Folgenden betrachten wir Zufallsexperimente, die endlich viele Ergebnisse (Ausgänge) haben und bei denen alle Ergebnisse **gleich wahrscheinlich** sind. Solche Experimente heißen LAPLACE-Experimente.

17. Werden mehrere Versuche nacheinander ausgeführt, so spricht man von einem **mehrstufigen Zufallsexperiment** bzw. einer **Kette**. Wenn mehrfach nacheinander gewürfelt wird, nennt man die Versuche voneinander **stochastisch unabhängig**. **Stochastisch abhängig** wäre das Verteilen von Karten aus einem Stapel.
Erklären Sie die Begriffe „abhängig“ und „unabhängig“ anhand von anderen Beispielen.
Wie ist das beim Ziehen aus einer Lostrommel mit sehr vielen Losen?
18. Das Würfeln mit einem (mathematischen) Würfel ist ein solcher Versuch. Nennen Sie andere LAPLACE-Experimente und geben Sie die Ergebnismengen an.

Berechnen von Wahrscheinlichkeiten

Bei einem LAPLACE-Experimente gilt für die Wahrscheinlichkeit P(E) eines Ereignisses E:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der für E günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}} = \frac{|E|}{|S|}$$

Kombinatorik

Um die Anzahl der günstigen zu bestimmen, ist es oft das einfachste, alle möglichen Ergebnisse aufzuschreiben und die Passenden zu markieren. Oftmals hätte man dann viel zu tun. Die Kombinatorik dient dazu, für bestimmte Kategorien von Aufgaben schneller zum Ziel zu finden. Eine wichtige Unterscheidung ist die Reihenfolge, in der Ereignisse auftreten.

somit auch 0.

54. Aus einer Urne mit 3 weißen und 2 roten Kugeln werden ohne zurücklegen, nacheinander zwei Kugeln entnommen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse
A: Beide Kugeln sind weiß.
B: Die Kugeln sind verschiedenfarbig.
C: Die erste Kugel ist weiß.
D: Die zweite Kugel ist rot. Quelle: VuW - Lösung: K

Baumdiagramme

Mehrstufige Zufallsexperimente lassen sich durch **Baumdiagramme** veranschaulichen. Da bei mehrstufigen Zufallsexperimenten die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse zu ermitteln sind und zu jedem Ergebnis genau ein Pfad im Baumdiagramm existiert, nennt man die von uns zu findenden Rechenvorschriften Pfadregeln.

Pfadregeln sind Rechenvorschriften zum Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen und Ereignissen mehrstufiger (n-stufiger, n ≥ 2) Zufallsexperimente. Die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse in den einzelnen Stufen müssen bekannt sein.

55. Aus einer Lotterie werden 5 Lose ohne zurücklegen entnommen.
In der Urne liegt ein Hauptgewinn von 1000€, 10 Trostpreise von 10€ und 89 Nieten.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung an. Lösung: K
Hinweis: Die Lösung der Aufgabe erfordert ein wenig Geduld.

Summen und Produktregel

Die Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades multiplizieren sich.
Die Wahrscheinlichkeiten verschiedener Wege (Pfade) addieren sich.

Zufallsgrößen

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Wird jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments genau eine reelle Zahl zugeordnet, dann nennt man diese Abbildung **Zufallsgröße X** (ZG).

Eine Funktion, die jeder dieser reellen Zahlen - ausgehend von der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ergebnisse des Zufallsexperiments - eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zuordnet, heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße $P(X = x_i)$**.

Erwartungswert

Unter dem Erwartungswert einer Zufallsgröße versteht man den zu erwartenden Mittelwert der Werte dieser Zufallsgröße.

Man bestimmt den **Erwartungswert E(X)** einer Zufallsgröße X, indem man jeden möglichen Wert $x_1, x_2, \ldots x_n$ der Zufallsgöße mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit multipliziert und diese Produkte addiert, d. h. $E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$.

42. Ein Alphabet bestehe aus den Buchstaben A und B.
Wieviel Wörter mit 4 Buchstaben gibt es in diesem Alphabet? Berechnen Sie auch die Anzahl der Wörter mit 8, 12 und 16 Buchstaben! Quelle: VuW - Lösung: K

43. In einem Krankenhaus sollen 16 Krankenschwestern zu zweit zum Dienst auf 8 Stationen eingeteilt werden.
   a) Wieviel Möglichkeiten hat die Oberschwester für den Dienstplan?
   b) Wieviel Möglichkeiten verbleiben noch, wenn die Krankenschwestern Ina und Karin auf gar keinen Fall auf der Intensiv-Station und die Krankenschwestern Sabine und Anke unbedingt auf der Wochen-Station arbeiten wollen? Quelle: VuW - Lösung: K

44. Sie haben sich von einer 7stelligen Telefonnummer nur die erste und die letzte Zahl merken können. Dunkel erinnern Sie sich auch noch daran, dass außerdem die Ziffern 3, 4, 4, 6 und 9 auftraten, aber die Reihenfolge dieser 5 Ziffern in der Mitte wissen Sie nicht mehr.
Wieviel Telefongespräche müssten Sie maximal führen, um die richtige Telefonnummer herauszufinden? Quelle: VuW - Lösung: K

45. 18 Schüler (8 Mädchen und 10 Jungen) bewerben sich in einem Betrieb für einen Ferienjob. Der Betrieb kann die Schüler für drei Arbeiten einsetzen, und zwar bei der ersten Arbeit 3 Mädchen, bei der zweiten 5 Jungen und bei der dritten 4 Mädchen oder Jungen.
Wieviel Einstellungsmöglichkeiten gibt es für den Betrieb? Quelle: VuW - Lösung: K

46. In einer Internatswohnung stehen 2 Dreibett- und 1 Zweibettzimmer zur Verfügung. In die Wohnung ziehen 8 Jungen ein. Wieviel Möglichkeiten der Zimmerbelegung gibt es?
Quelle: VuW - Lösung: K

47. Wieviel verschiedene Farbmuster ergeben sich (Abbildung 3) wenn
   a) 8 verschiedenfarbige Perlen,
   b) 4 rote, 2 weiße und 2 grüne Perlen aneinandergereiht werden? Quelle: VuW - Lösung: K

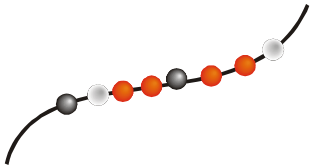


Abbildung 3

48. Fünf Ehepaare haben einen Tennisplatz gemietet.
   a) Als erstes soll ein gemischtes Doppel gespielt werden. Wieviel Möglichkeiten für die Auswahl der ersten vier Spieler gibt es?
   b) Geben Sie auch die Anzahl der entsprechenden Möglichkeiten an, wenn gefordert wird, dass nicht beide Partner eines Ehepaares im ersten Match spielen (sowie wenn nicht beide Partner eines Paares auf einer Seite spielen) dürfen? Quelle: VuW - Lösung: K

49. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden bei der nächsten Ziehung im Lotto „6 aus 49“ alle 6 Zahlen gezogen, die Sie auf einem Lotto-Schein ankreuzen würden? Quelle: VuW - Lösung: K

50. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Tip einen 4-er (5-er, 3-er, 2-er, 1-er) zu haben?
Lösung: K

51. Eine Schreibmaschine hat 44 Tasten. Der kleine Felix tippt 5 verschiedene Tasten auf gut Glück. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er das Wort "Felix" tippt? (Bedenken Sie, dass die Reihenfolge zu beachten ist!) Quelle: VuW - Lösung: K

52. In einem Teich befindet sich eine unbekannte Anzahl von Karpfen. Man fängt 1 000 Stück, kennzeichnet sie und lässt sie wieder in den Teich zurück. Nach einiger Zeit fängt man 150 Karpfen und stellt fest, dass unter ihnen 10 markierte sind.
Wieviel Karpfen befinden sich mindestens in diesem Teich?
Wieviel Karpfen befinden sich vermutlich in diesem Teich? Quelle: VuW - Lösung: K

53. Das Knobelspiel "Schere-Stein-Papier" wird bestimmt durch gleichzeitiges Zeigen bestimmter Handzeichen von 2 Leuten. Dabei gewinnt . "Schere" gegen "Papier", "Papier" gegen "Stein", "Stein" gegen "Schere". Zeigen beide das gleiche Zeichen, endet die Runde unentschieden.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Spieler A bzw. gewinnt Spieler B nicht bzw. endet es unentschieden, wenn jeder Spieler willkürlich ein Zeichen zeigt? Quelle: VuW - Lösung: K

Wenn die **Reihenfolge interessiert,** dann bilden die Elemente ein **Tupel.** Wir schreiben Tupel in runde Klammern (...). Mit (a | b | c) beschreibt man also ein 3-Tupel / Tripel aus den Elementen a, b und c.

Wenn die **Reihenfolge nicht interessiert,** dann bilden die ausgewählten Elemente eine Menge. Wir schreiben diese Mengen wie üblich in geschweifte Klammern {...}. {a | b | c} ist eine 3-elementige Menge.

Im ersten Beispiel sei die Reihenfolge von großer Wichtigkeit:
Vier Sportler nehmen am gleichen Wettkampf teil. Wie viele mögliche Ausgänge gibt es?
Die Frage beantwortet man schnell durch folgende Überlegung: Es gibt Vier, die die Stelle des Siegers einnehmen wollen. Zweiter können dann noch Drei werden; Dritter noch Zwei und Letzter – wird der Letzte – ist doch klar. Insgesamt gibt es also: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ verschiedene Einläufe. Das führt zur Permutation.

Eine Anordnung von n Elementen auf n Positionen nennt man **Permutation**[4]. Die Anzahl der Permutationen ergibt sich dann aus $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.[5]

Anmerkung: für das Produkt gibt es ähnlich zur Schreibweise mit dem Summenzeichen z. B.: $\sum_{i=1}^{n} i$ die

Produktschreibweise: $n! = \prod_{i=1}^{n} i$

Das nächste Beispiel ist sehr ähnlich. Die Reihenfolge ist immer noch wichtig.
Acht Sportler nehmen am gleichen Wettkampf teil. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die besten Drei?
Die Frage beantworten wir analog zur Vorhergehenden: Es gibt Acht, die die Stelle des Siegers einnehmen wollen, Sieben können dann noch Zweiter werden und Sechs machen unter sich den Dritten aus. Insgesamt gibt es also $8 \cdot 7 \cdot 6 = 8!/5! = 336$ Möglichkeiten.

Sollen aus n Elementen nacheinander k Elemente der Reihe nach ausgewählt werden, so gibt es
$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten. Dies nennt man **Variation**[6] **ohne** Wiederholung

Anmerkung: $V_n^k = \prod_{i=n-k+1}^{n} i$

Was könnte nun ein Beispiel für eine **Variation mit** Wiederholung sein? Nun – bleiben wir beim Sport: Acht Zehnkämpfer versuchen den Sieg unter sich auszumachen. Wir betrachten den Sieger in jedem der 10 Kämpfe. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es?
Die Beantwortung der Frage fällt wieder leicht: im ersten Kampf könnte das jeder sein, im zweiten Kampf könnte das jeder sein usw. Insgesamt also $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^{10}$ Möglichkeiten

Jede mögliche Anordnung mit Berücksichtigung der Reihenfolge aus je k von n Elementen heißt Variation und berechnet sich im Falle der möglichen Wiederholung der Elemente durch: $\overline{V_n^k} = n^k$.

Nun stellt sich die Frage: Wer hat denn nun gewonnen?[7] So landen wir bei den **Kombination**en.

Jede mögliche Anordnung ohne Berücksichtigung der Reihenfolge aus je k von n Elementen heißt **Kombination**. Ohne Wiederholung der einzelnen Elemente ergibt sich: $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$[8]

---

[4] Es ist klar, dass sich dann kein Element wiederholen kann und das die Reihenfolge von Bedeutung ist.
[5] Die mathematische Funktion n! (Fakultät) ist im GTR unter Math+PRoBability zu finden.
[6] Variation k-ter Klasse von n verschiedenen Elementen ohne Wiederholung
[7] Und die kann hier natürlich nicht beantwortet werden.
[8] Sprich „n über k“. Schreibweise für den Binomialkoeffizienten. GTR-Funktion wieder im Math-Menü unter PRoBability zu finden.

Da wir auf die Frage „Wer hat denn nun gewonnen?“ jeden Gewinner nur einmal aufzählen, haben wir bei 8 Teilnehmern und 3 Plätzen insgesamt $\binom{8}{3}=\frac{8!}{(8-3)!\cdot 3!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}$ verschiedene Möglichkeiten zu antworten.

Anmerkung: Nicht ohne Grund haben Variation und Kombination sehr ähnliche Formeln. Dadurch, dass Wiederholungen zugelassen werden, fallen k! Möglichkeiten weg.

Anmerkung: Der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k}$ wird sehr häufig verwendet. Sehen Sie doch mal nach dem Binomischen Satz oder dem PASCALschen Dreieck.

Und zum Abschluss: Wer waren die Sieger der 10 Disziplinen? Hier ist nun die Widerholung zugelassen, denn Einer kann ja in verschiedenen Sportarten gewinnen (oder in allen). Die Antwort darauf findet man in der

Kombination von n Elementen zur k-ten Klasse mit Wiederholung: $\overline{C_n^k}=\binom{n+k-1}{k}$

Aufgaben zur Kombinatorik

19. Bei einem 5000 m-Lauf sind 5 Läufer am Start.
    Wie viele Möglichkeiten für den Zieleinlauf gibt es? Quelle: VuW – Lösung: K
20. 10 Personen sollen sich namentlich in eine Liste eintragen.
    Wieviel Eintragungsmöglichkeiten gibt es? Quelle: VuW - Lösung: K
21. Wieviel Wörter kann man aus den 6 Buchstaben a, b, e, f, n, s bilden, wenn kein Buchstabe doppelt vorkommen soll? (Der Sinn des Wortes und die Aussprachefähigkeit sollen bei dieser Überlegung keine Rolle spielen.) Quelle: VuW - Lösung: K
22. Ein Arzt muss auf seiner Hausbesuchstour 9 Patienten besuchen. Wieviel Möglichkeiten hat er für die Reihenfolge der Krankenbesuche? Quelle: VuW - Lösung: K
23. Wieviel verschiedene fünfstellige Zahlen kann man aus 5 Ziffern bilden, wenn keine Ziffer doppelt vorkommen soll? Quelle: VuW - Lösung: K
    Wie ändert sich die Anzahl, wenn Ziffern auch mehrfach auftreten können?
    (Hinweis: Überlegen Sie, wieviel Möglichkeiten es für jede einzelne Stelle gibt!)
24. Für die deutschen Autonummern (L - AC 3718) wurde das folgende System entwickelt: Zuerst stehen 1 bis 3 Buchstaben, die den Ort bzw. den Kreis bezeichnen. Dann folgen 1 oder 2 Buchstaben und den Abschluss bilden 1 bis 4 Ziffern.
    Wieviel verschiedene Autonummern kann man auf diese Weise in einem bestimmten Kreis (bzw. in einem bestimmten Ort) höchstens ausgeben? Quelle: VuW - Lösung: K
25. Wieviel Möglichkeiten gibt es, aus einer Urne mit 5 numerierten Kugeln zwei Kugeln nacheinander herauszunehmen, wenn die Kugeln nicht zwischendurch wieder zurückgelegt werden?
    Quelle: VuW - Lösung: K
26. Beim Sportunterricht, an dem 24 Schüler teilnehmen, sollen 2 Schüler zum Aufbauen der Turngeräte eingeteilt werden. Wie viele Möglichkeiten stehen zur Auswahl?
    Quelle: VuW - Lösung: K
27. Wir sind auf der Rennbahn und interessieren uns für die drei Erstplazierten unter 10 Pferden.
    a) Wieviel verschiedene Tips gibt es, wenn die Reihenfolge, in der die Pferde durchs Ziel gehen, nicht berücksichtigt wird?
    b) Wieviel verschiedene Tips sind es, wenn die Reihenfolge doch berücksichtigt werden soll?
    Quelle: VuW - Lösung: K
28. Ein roter, ein grüner und ein blauer Würfel werden geworfen.
    Wieviel Möglichkeiten gibt es für die 3 gewürfelten Augenzahlen?
    Wieviel davon zeigen auf jedem Würfel eine andere Augenzahl? Quelle: VuW - Lösung: K

29. Für welche der folgenden Auswahlen gibt es mehr Möglichkeiten:
    - für die Auswahl von 2 Personen aus einer Gruppe von 8, oder
    - für die Auswahl von 6 Personen aus einer Gruppe von 8? Quelle: VuW - Lösung: K
30. Wieviel Möglichkeiten gibt es, 8 Türme so auf ein Schachbrett zu setzen, dass kein Turm einen anderen schlagen kann. Quelle: VuW - Lösung: K
31. An einem Volleyball-Wettkampf beteiligen sich 16 Mannschaften. Wieviel Spiele sind auszutragen, wenn jede Mannschaft gegen jede spielen soll?
    Wieviel Spiele sind es, wenn durchgängig nach dem k.o.-System gespielt wird, also nur der Meister ermittelt wird? Quelle: VuW - Lösung: K
32. Eine Münze wird fünfmal hintereinander geworfen. Nach jedem Wurf wird notiert, ob Zahl (Z) oder Wappen (W) oben liegt. Als Ergebnis dieses Vorgangs erhält man eine Folge von 5 Zeichen, z. B. (ZZWZW).
    a) Wieviel derartige Folgen sind überhaupt möglich?
    b) Wieviel Folgen gibt es, in denen genau zweimal Z registriert wurde? Quelle: VuW - Lösung: K
33. Bei einer statistischen Qualitätskontrolle wird aus einer Produktionsserie eine bestimmte Anzahl Erzeugnisse ausgewählt und untersucht. Aus dem Ergebnis der Stichprobenuntersuchung schließt man dann auf die Qualität der ganzen Serie.
    Wieviel verschiedene Stichproben gibt es bei einer Produktionsserie von 100 Stück, wenn die Stichprobe aus 2 Stück besteht? Quelle: VuW - Lösung: K
34. Aus einer Sendung von 90 Batterien werden zu einer Stichprobenprüfung 4 willkürlich herausgegriffen.
    Wieviel Auswahlmöglichkeiten gibt es? Quelle: VuW - Lösung: K
35. Ein Versorgungsfahrzeug soll von einem Großhandelslager aus nacheinander 6 verschiedene Verkaufsstellen anfahren. Wieviel Möglichkeiten einer Versorgungstour gibt es?
    Quelle: VuW - Lösung: K
36. Wieviel verschiedene dreistreifige Flaggen können aus 7 Farben zusammengestellt werden? (Abbildung 1) Quelle: VuW - Lösung: K

Abbildung 1

37. In einer Stadt möge es 5stellige Telefonnummern geben.
    a) Wieviel Anschlüsse können in dieser Stadt insgesamt vergeben werden, wenn an der ersten Stelle keine 0 stehen darf?
    b) Wieviel dieser Anschlüsse bestehen jeweils nur aus verschiedenen Ziffern? Quelle: VuW - Lösung: K
38. Die Grundform bei der Braille-Blindenschrift besteht aus einem Rechteck, das aus 6 Punkten gebildet wird. Jeder Buchstabe wird durch 1 bis 6 Punkte gebildet, von denen jeder an eine bestimmte Stelle des Schemas besetzt wird (ein- oder hochgedrückt; vgl. mit Abbildung 2).
    Wieviel Zeichen kann man auf diese Art und Weise bilden? Quelle: VuW - Lösung: K

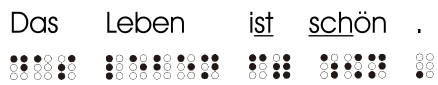


Abbildung 2

39. Wieviel verschiedene Initialen (z. B. Karl Müller: K. M.) können aus 2 Buchstaben (aus 3 Buchstaben) gebildet werden? Quelle: VuW - Lösung: K
40. Wie lang muss ein Alphabet sein, damit 1 Million Menschen durch 3buchstabige Initialen identifiziert werden können? (Vgl. Kurt Friedrich Nebel: K. F. N.) Quelle: VuW - Lösung: K
41. 9 Kinder stehen im Kreis und spielen Ball. Wieviel verschiedene Strecken kann der Ball zurücklegen, wenn eine Strecke den Weg von Kind zu Kind darstellt? Quelle: VuW - Lösung: K