

Klausur unter abiturähnlichen Bedingungen Leistungskursfach Mathematik

- Ersttermin -

Material für die Teilnehmerin

Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte) beträgt **300 Minuten**.

Teil A: Ein Teil der Aufgaben im Teil A ist **auf dem Aufgabenblatt** zu lösen.

Für die Bearbeitung der Aufgaben im Teil A sind ausschließlich folgende **Hilfsmittel** zugelassen:

- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung,
- Zeichengeräte und Zeichenhilfsmittel.

Im Teil A sind **15 BE** (Bewertungseinheiten) zu erreichen.

Alle Materialien zum Teil A werden 60 Minuten nach Arbeitsbeginn eingesammelt.

Teil B: Für die Bearbeitung der Aufgaben im Teil B sind nach dem Einsammeln von Teil A folgende **Hilfsmittel** zugelassen:

- grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner,
- Tabellen- und Formelsammlung,
- im Teil A zugelassene Hilfsmittel.

Im Teil B sind **45 BE** zu erreichen.

Geben Sie auf dem Deckblatt der Arbeit den verwendeten Typ des Taschenrechners an.

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden. Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabedaten berechnet.

Bearbeiten Sie auch die **Rückseiten** der Blätter.

Bewertung

Name des Schülers / der Schülerin: _____

Pkt	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
BE	60-58	57-55	54-52	51-49	48-46	45-43	42-40	39-37	36-34	33-31	30-28	27-25	24-21	20-17	16-13	12-0

Aufgabenteil A

Tragen Sie die Antworten zu den Aufgaben 1 und 2 auf dem vorliegenden Aufgabenblatt ein.

Verwenden Sie für die Antworten zu den Aufgaben 3 und 4 eigenes Papier oder das Aufgabenblatt.

1. In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an. 5 BE

1.1. Eine Gleichung der ersten Ableitungsfunktion der Funktion $f(x) = \sqrt{(3 \cdot x - 1)^3}$ ($x \in D_f$) lautet:

$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot x - 1}$ ($x \in D_f$)

$f'(x) = \frac{9}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot x - 1}$ ($x \in D_f$)

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot x - 1}$ ($x \in D_f$)

1.2. Der Zufallsgenerator eines Computers ermittelt bei einem Aufruf genau einen Buchstaben von A bis H. Jeder dieser acht Buchstaben wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt. Pascal ruft diesen Zufallsgenerator genau fünf Mal auf.

$f'(x) = \frac{9}{2 \cdot \sqrt{3 \cdot x - 1}}$ ($x \in D_f$)

$f'(x) = \frac{2}{9 \cdot \sqrt{3 \cdot x - 1}}$ ($x \in D_f$)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle fünf Buchstaben größer als D sind¹?

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{8}$

$\frac{1}{16}$

$\frac{1}{32}$

1.3. Eine aus mehreren Teilflächen zusammengesetzte Fläche wird vom Graphen der Funktion f und g vollständig begrenzt (siehe Abbildung).

Mit welchem Term kann man den Inhalt der gesamten Fläche berechnen?

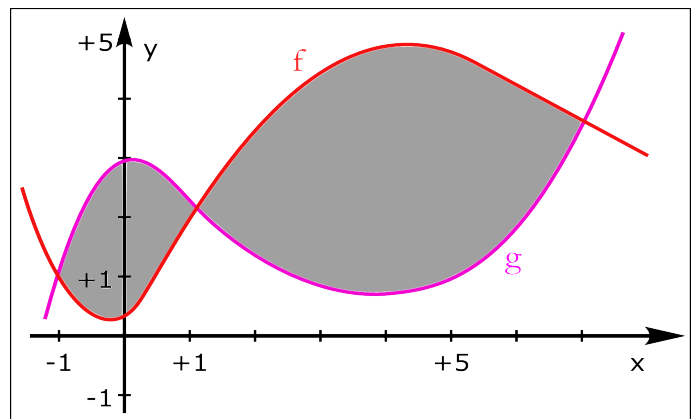
$\left| \int_{-1}^7 g(x) dx - \int_{-1}^7 f(x) dx \right|$

$\int |f(x) - g(x)| dx$

$\left| \int_{-1}^7 f(x) - g(x) dx \right|$

$\int |f(x)| - |g(x)| dx$

$\int_{-1}^7 f(x) - g(x) dx$



1.4. Für welchen Wert für a ($a \in \mathbb{R}$) verläuft die Gerade g_a parallel zur Ebene E ?

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}); \quad E: x - 2y + 3z - 5 = 0$$

$a = -1$

$a = 0$

$a = 1$

$a = 2$

$a = 3$

1.5. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

Jede im Intervall $a \leq x \leq b$ stetige Funktion ist monoton wachsend.

Jede im Intervall $a \leq x \leq b$ stetige Funktion ist dort auch definiert.

Jede im Intervall $a \leq x \leq b$ definierte Funktion ist dort auch stetig.

Jede im Intervall $a \leq x \leq b$ stetige Funktion besitzt dort eine Wendestelle.

Jede im Intervall $a \leq x \leq b$ stetige Funktion besitzt dort mindestens eine Nullstelle.

¹ gemeint ist die alphabetische Ordnung

Name: _____

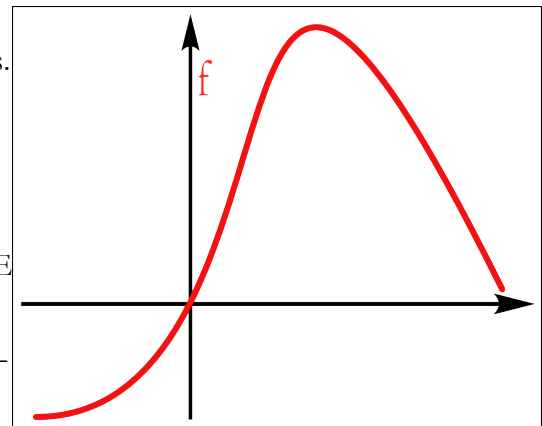
2. Nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f in einem Intervall des Definitionsbereiches.

2.1. Begründen Sie, dass die Funktion f durch keine der beiden folgenden Funktionen beschrieben werden kann:

a) eine ganzrationale Funktion zweiten Grades

b) $f(x) = e^{-2x} - 1$ ($x \in \mathbb{R}$)

2 BE



2.2. Skizzieren Sie zum vorgegebenen Graphen der Funktion f in dasselbe Koordinatensystem den Graphen der zugehörigen ersten Ableitungsfunktion f' im dargestellten Intervall. 1 BE

3. Gegeben ist eine Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze S . Die Eckpunkte haben die Koordinaten $A(1 \mid 5 \mid 2)$, $B(4 \mid 9 \mid 2)$, $C(-3 \mid 8 \mid 2)$ und $S(5 \mid 1 \mid -2)$.

3.1. Weisen Sie nach, dass die Grundfläche ABC der Pyramide ein rechtwinkliges und gleichschenkliges Dreieck ist. 3 BE

3.2. Geben Sie die Höhe dieser Pyramide an. 1 BE

4. In einer Urne befinden sich genau 10 Kugeln in zwei verschiedenen Farben, wobei genau 4 Kugeln blau und die anderen Kugeln gelb gefärbt sind. Ein Glücksspiel besteht darin, dass für einen Einsatz von 1 € genau zweimal je eine Kugel mit Zurücklegen zufällig aus der Urne gezogen wird.

Werden zwei gelbe Kugeln gezogen, erhält der Spieler 1 € ausgezahlt.

Haben die beiden gezogenen Kugeln verschiedene Farben, erhält der Spieler keine Auszahlung.

Bestimmen Sie den Auszahlungsbetrag an den Spieler beim Ziehen von zwei blauen Kugeln, wenn der Erwartungswert für den Gewinn des Spielers Null sein soll. 3 BE

Leerseite

Aufgabenteil B

Teil B1

In einem Spiel sollen sich Lemmings entlang einer Kurve bewegen (rote Linie in Abbildung 1). Die Spielprogrammierer wollen einen möglichst einfachen Funktionsterm dafür finden.

Aus dem Koordinatensystem ergeben sich folgende Angaben:

- Startpunkt S(-8 | 6),
- Tiefpunkt T(0 | 0) und
- Absprungpunkt A(3 | 1).
- Der Absprungwinkel in A sei 8° .

• 1 Einheit entspricht 10m.

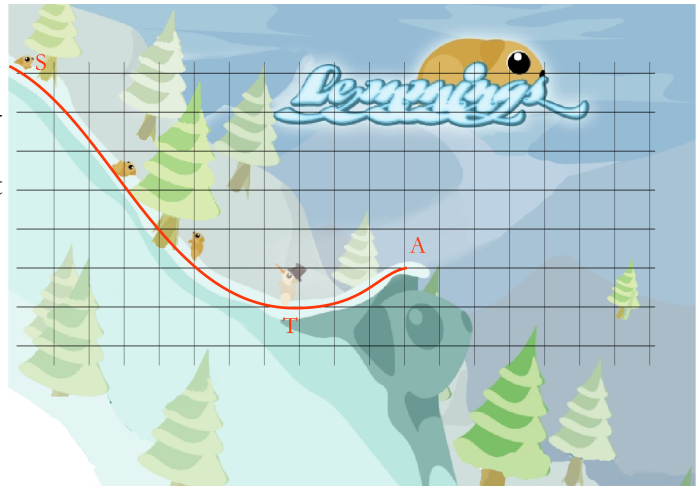


Abbildung 1: Ideallinie mit Maßstab

1. Begründen Sie, warum eine Kurve 3. Grades ungeeignet ist. 1 BE
2. Mit den obigen Angaben kann eine Kurve 4. Grades berechnet werden.
 - a) Geben Sie zur Berechnung einer Funktion ein lineares Gleichungssystem (IGS) an und berechnen Sie den Funktionsterm. 4 BE
Zur Kontrolle: Es ergibt sich näherungsweise $y = -0.0054x^4 - 0.025x^3 + 0.23x^2$.
 - b) Begründen Sie, warum dieser Funktionsterm trotzdem ungeeignet ist den Kurvenverlauf richtig zu beschreiben. 2 BE
3. Unter der Annahme, dass im Startpunkt S das Gefälle zur Horizontalen -27° beträgt, findet man die Gleichung² $y = f(x) = -0.0003813x^5 - 0.006221x^4 - 0.01084x^3 + 0.2099x^2$.
 - a) Welche Gleichung würde ein IGS weiterhin enthalten müssen? 1 BE
 - b) Bestimmen Sie rechnerisch die Stelle und das Gradmaß des stärksten Gefälles. 4 BE
 - c) Bestimmen Sie rechnerisch die Bahnlänge³. 3 BE

Achtung: anders als im Abitur haben Sie die Wahl diesen Aufgabenteil zu lösen, oder den im Teil B2

Aus dem Höhenunterschied h von S und A und dem Energieerhaltungssatz ergibt sich unter der Bedingung einer reibungsfreien Bewegung eine Absprunggeschwindigkeit von $v_0 = \sqrt{1000} \frac{m}{s}$. Der Absprungwinkel in A sei weiterhin 8° . Verlässt ein Lemming A fliegt er gemäß dem schrägen Wurf auf einer Parabelbahn⁴ $y = p_{\alpha; v_0}(x) = \tan \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2$ ($g \approx 10 \frac{m}{s^2}$).

4. Die Landebahn soll in der Höhe des Tiefpunktes gebaut werden.
 - Bestimmen Sie rechnerisch den Landepunkt L. 2 BE
 - Berechnen Sie den Landewinkel λ , der durch die Flugbahn vorgegeben wird. 2 BE
 - Zeichnen Sie eine passende Strecke als Landebahn in Abbildung 1 ein. 1 BE

Um das Spiel natürlicher wirken zu lassen, soll die tatsächliche Absprunggeschwindigkeit v_t durch die Reibung eine normalverteilte Zufallsgröße mit $\mu = 30 \text{ m/s}$ und einer Standardabweichung σ sein.

5. Berechnen Sie die Standardabweichung σ , dass in 99% der Fälle v_t unter $v_0 = \sqrt{1000} \frac{m}{s}$ liegt. 3 BE
 Welche Schlussfolgerungen müssten nun in Bezug auf den Landepunkt L in die Rechnung einfließen. 2 BE

² Die Gleichung entspricht zwar nicht der Ideallinie in der Abbildung, soll aber als Näherung ausreichen.

³ Die Kurvenlänge L_F berechnet sich im Intervall $a \leq x \leq b$ mit der Formel $L_F = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

⁴ Der Koordinatenursprung der Parabelbahn liegt dann im Punkt A.

Teil B2

Eine Theaterbühne hat einen rechteckigen Fußboden mit der Breite 10 m und der Tiefe 8,20 m. Links davon steht eine Empore mit einer Breite von 2 m und einer Höhe von 1,80 m. Genau in der Mitte der Bühne steht als Dekoration eine 5 m hohe quadratische Pyramide mit der Bodenseitenlänge von 4 m. Im zweiten Akt soll aus dramaturgischen Gründen von oben ein zweiter nach hinten ansteigender Bühnenboden senkrecht herabgelassen werden. Die Pyramide soll stehen bleiben. In der Endlage fällt die vordere Kante dieses zweiten Bodens mit der vorderen Kante des Fußbodens zusammen. Die hintere Kante des zweiten Bodens soll dann 1,8 m höher sein als der Fußboden.

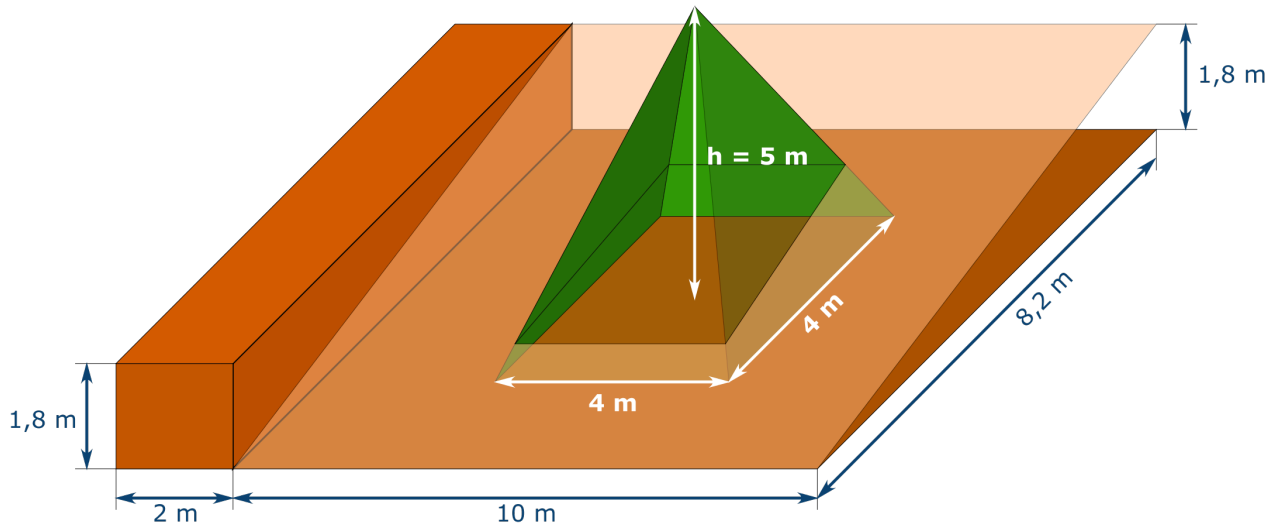


Abbildung 2: Theaterbühne – nicht maßstäblich

Die Bühnenhandwerker müssen aus dem zweiten Boden ein Viereck aussägen, weil sonst beim Herabsenken die Pyramide im Wege wäre. In der Endlage des zweiten Bodens sollen die Seitenflächen der Pyramide und die Seiten des herausgesägten Vierecks sauber abschließen. Die Dicke des zweiten Bühnenbodens wird hier vernachlässigt. Der zweite Boden liegt zur Bearbeitung als rechteckige Platte auf dem Boden der Werkstatt, und das herauszutrennende Viereck soll angerissen werden.

1. Berechnen Sie den Neigungswinkel des schrägen Bühnenbodens zur Fußbodenfläche. 1 BE
Um wieviel länger müsste der schräge Bühnenboden gegenüber der Fußbodenfläche sein? 1 BE
2. Wählen Sie den Koordinatenursprung geeignet, benennen Sie wichtige Punkte in Abbildung 2 und geben Sie deren Koordinaten an (natürlich bis auf die Koordinaten des ausgeschnittenen Vierecks, die ja erst im Laufe der Aufgabe berechnet werden sollen). 3 BE
3. Geben Sie eine Koordinaten- und eine Parameterform für die Ebene, in der der schräge zweite Bühnenboden in seiner Endlage liegt, an. 2 BE
4. Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Eckpunkte des auszusägenden Vierecks, wenn der Bühnenboden sich in der gewünschten Endlage befindet. 4 BE

weiter auf Seite 7

5. Mit den in 4. berechneten Daten kann der Bühnenbauer so noch nicht viel anfangen, für ihn liegt die Platte flach auf dem Boden der Werkstatt. Markieren Sie im nebenstehenden Raster das auszusägende Viereck.

3 BE

6. Beim Kurt Weill⁵ Fest in Dessau sind auch in diesem Jahr wieder alle Vorstellungen lange vorher ausverkauft.

Ein Paar steht an der Abendkasse und hofft auf zurückgegebene Karten.

Um sich die Zeit zu vertreiben, wird folgende Rechnung angestellt:

„Vor uns stehen 5 Paare. Angenommen der Theatersaal verfügt über Plätze für 300 Paare und im Durchschnitt fällt von 50 Paaren ein Paar aus, dann kommen wir gerade so noch rein.“

Berechnen Sie mit den obigen Angaben

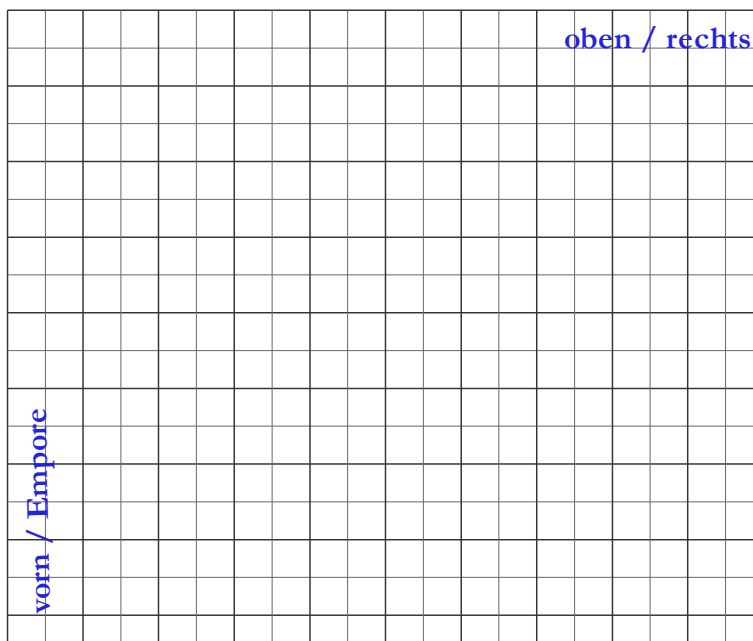
- a) die Wahrscheinlichkeit keine Karten mehr zu bekommen und 1 BE
 b) die Wahrscheinlichkeit gerade noch die letzten zwei Karten zu bekommen. 1 BE

Um die Hypothese bezüglich der Wahrscheinlichkeit zu überprüfen, soll ein Signifikanztest für 600 Plätze (1 Paar = 2 Karten) zum Signifikanz-Niveau 5% durchgeführt werden.

- a) Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich für zurückgegebene Karten. 2 BE

Die Veranstalter haben allerdings genauere Zahlen. Sie wissen: die Anzahl zurückgegebener Karten beim Fest ist annähernd normalverteilt mit $\mu = 15$ und $\sigma = 0,86$.

- a) Berechnen Sie ein Intervall in dem die Anzahl zurückgegebener Karten mit 98%-iger Wahrscheinlichkeit liegen wird. 2 BE



Zeichnung 1: Raster

Achtung: anders als im Abitur haben Sie die Wahl diesen Aufgabenteil zu lösen, oder den im Teil B1

Ein punktförmiger Leuchter befindet sich in einer Höhe von 2 m und beleuchtet die gesamte Pyramide. Dabei ist ein Schattenwurf zu beobachten.

Entnehmen Sie der Zeichnung die weiteren Angaben zur Positionierung der Lampe.

7. Berechnen Sie, wohin der Schatten der Spitze fällt. 2 BE
 8. Markieren Sie in der maßstäblichen Zeichnung den Schatten der Spitze und den Schatten auf der linken Theater-Raumwand und der linken Wand der Empore.

3 BE

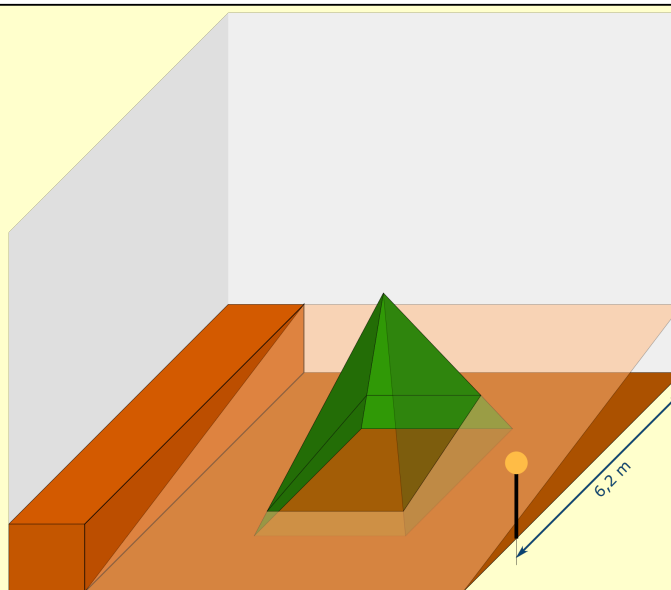


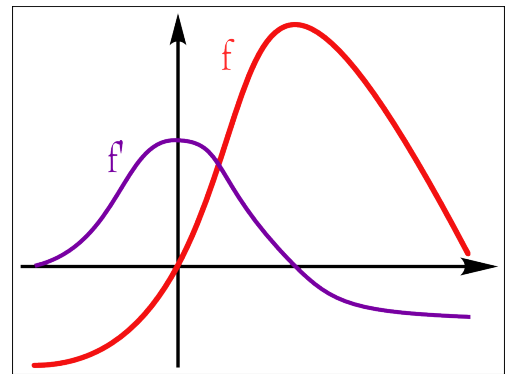
Abbildung 3: Maßstab der Zeichnung 1:200

5 Kurt Weill (* 2. März 1900 in Dessau; † 3. April 1950 in New York) war ein deutscher und später US-amerikanischer Komponist. Quelle Wikipedia

Lösungen

- 1.) Feld 2, Feld 5, Feld 2, Feld 3, Feld 2
 2.) a) sind Parabeln und die haben keine Wendepunkte
 (im Bild ist $W(0|0)$ abzulesen)
 b) e^{2x} hat keine Wendepunkte, die angegebene Funktion
 dann auch nicht

3.) $AB = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $AC = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $AB \cdot AC = 0 \wedge |AB| = |AC| = 5 \Rightarrow$
 rechtwinklig, gleichschenkelig
 $h = 4$



- 4.) $p_{\text{blau}} = .4$; $p_{\text{gelb}} = .6$;
 X – Zufallsgröße, die den Gewinn beim Spiel beschreibt.
 $\frac{9}{25} + \frac{x \cdot 4}{25} = 1 \Rightarrow x = 4$

x_i	$P(x_i)$
1,00 €	$p_{\text{gelb}} p_{\text{gelb}}$
0,00 €	$2 p_{\text{blau}} p_{\text{gelb}}$
x €	$p_{\text{blau}} p_{\text{blau}}$

B1

- 1.) Es sind zwei Wendepunkte zu erkennen, damit müsste mindestens ein Polynom 4. Grades zur Rekonstruktion verwendet werden.

2.) I: $f(-8) = 6$

II: $f(0) = 0$

III: $f'(0) = 0$

IV: $f(3) = 1$

V: $f'(3) = \tan(8^\circ) \Rightarrow f(x) = -.00545788 x^4 - .02571 x^3 + .237365 x^2$

der Graph steigt von $x = -8$ bis $x \approx -6,5$ in eine Höhe von ca 7,37 – das passt nicht zur Kurve

a) VI: $f(8) = \tan(-27^\circ)$

b) $f'(x_w) = 0 \Rightarrow \text{GTR: } f_{\text{Min}}(Y2, X, -8, 0) \rightarrow x \approx -3.8433$ und
 $n\text{Derive}(Y2, X, -3.8433) \rightarrow m \approx -1.0973 \rightarrow -47.7^\circ$

c) GTR: $Y3 = n\text{Derive}(Y2, X, X)$ und $f_{\text{Int}}(\sqrt{(1+Y3^2)}, X, -8, 3) \rightarrow 13.37$

- 3.) Da die Einheit im Koordinatensystem 10 m ist, müssen die Eingangsgrößen umgerechnet werden:

$$v_0 = \sqrt{1000} \frac{m}{s} = 10 \frac{m}{s} \cdot \sqrt{10} \Rightarrow v = \sqrt{10} \text{ und } g = 10 \text{ m/s} \Rightarrow g = 1$$

$$p(x) = \tan 8^\circ - \frac{1}{20(\cos 8^\circ)^2} \cdot x^2 \text{ wird jetzt verschoben, so dass der Absprungpunkt zu dem Koordi-}$$

$$\text{natensystem passt: } q(x) = p(x - 3) + 1 \rightarrow q(x) \approx -0.050987 x^2 + 0.44646 x + 0.11948$$

$$\text{Nullstelle mit GTR: } L(9.0163|0); \text{Anstieg } m \approx -.472972; \text{Winkel } \lambda \approx -.441792 \text{ rad} \approx -25.3^\circ$$

- 4.) $\mu = 30$; $\sigma = ?$

$$\Phi_{\mu, \sigma}(\sqrt{1000}) > 99\% \Rightarrow \text{invNorm}(.99, \sqrt{1000}, 30) \rightarrow \sigma \approx 0.6976$$

Landepunkt vorverlegen und steiler machen

B2

1. $\alpha = \arctan\left(\frac{1.8}{8.2}\right) \approx 12.38^\circ$

$$l \approx 8.395 \text{ m} \rightarrow \Delta l \approx .195 \text{ m}$$

2. A(6.1 | 3 | 0), B(6.1 | 7 | 0), C(2.1 | 7 | 0), D(2.1 | 3 | 0), M(4.1 | 5 | 0), S(4.1 | 5 | 5)

3. $18x + 82z = 147.6$ bzw. $\varepsilon: 9x + 41z = 73.8,$

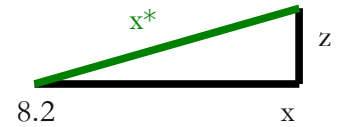
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8.2 \\ 0 \\ -1.8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

4. $g_{AS} \cap \varepsilon = E = (5.898 \mid 3.202 \mid .505)$

$g_{BS} \cap \varepsilon = F = (5.898 \mid 6.798 \mid .505)$

$g_{CS} \cap \varepsilon = G = (2.592 \mid 6.508 \mid 1.231)$

$g_{DS} \cap \varepsilon = H = (2.592 \mid 3.492 \mid 1.231)$



5. Die y-Werte blieben unverändert. Umrechnung der x und z-Werte zu Koordinaten auf der Platte (Koordinatenursprung ist unten rechts). Es reicht x_E und x_H zu berechnen (siehe Skizze).

$$x^* = \sqrt{(8.2 - x)^2 + z^2} \Rightarrow x_E \approx 2.357 \text{ und } x_H \approx 5.742$$

6. $n = 300; p = .02$

a) $B_{n,p}(5) = .444$ und

b) $b_{n,p}(6) = .1623$

c) $H_0: p = .02$ $H_1: p \neq .02$ mit $n = 600$ und $\mu = 12$

berechne $B_{np}(12+k) - B_{np}(12-k)$ für $k = 6 \rightarrow 92\%$ und $k = 7 \rightarrow 96\%$

Annahmebereich: $A [5 .. 19]$ und $\bar{A} [0 .. 4] \wedge [20 .. 600]$

d) $\Phi_{\mu,\sigma}(x) < 1\% \Rightarrow GTR: \text{invNorm}(.01, 15, .86) \rightarrow 12.999 \rightarrow A [13 .. 17]$

7. $L(6.2 \mid 10 \mid 2)$

Schnittpunkte mit Ebene: $y = -2$ ($x, z \in \mathbb{R}$) \Rightarrow

$S_S(1.16 \mid -2 \mid 9.2), A_S(6.029 \mid -2 \mid -1.429), C_S(-10.2 \mid -2 \mid -6)$

Schnittpunkte mit Ebene: $y = 0$ ($x, z \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow S_T(2 \mid 0 \mid 8), A_T(6.058 \mid 0 \mid -.86),$

