

# Klausur unter abiturähnlichen Bedingungen Leistungskursfach Mathematik

- Ersttermin -

---

## Material für die Teilnehmerin

---

### Allgemeine Arbeitshinweise

Ihre Arbeitszeit (einschließlich der Zeit für das Lesen der Aufgabentexte und der Zeit für die Auswahl der Wahlaufgabe) beträgt 300 Minuten.

Die Prüfungsarbeit besteht aus den zu bearbeitenden **Pflichtteilen A, B und C** sowie dem **Wahlteil D**.

Es sind alle Aufgaben der Pflichtteile zu bearbeiten.

Aus dem Teil D ist **genau eine** der beiden Aufgaben zu bearbeiten.

Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionen) Hilfslinien muss deutlich erkennbar in gut lesbarer Form dargestellt werden.

**Bei Verwendung von GTR-Programmen ist anzugeben, aus welchen Eingabedaten das Programm welche Ausgabedaten berechnet.**

Insgesamt sind 60 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, davon

- im Teil A 25 BE,
- im Teil B 15 BE,
- im Teil C 10 BE,
- im Teil D 10 BE.

### Erlaubte Hilfsmittel:

- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
- Taschenrechner ohne Computer-Algebra-System
- Tabellen- und Formelsammlungen (im Unterricht eingeführt, ohne ausführliche Musterbeispiele)
- Zeichengeräte

## Teil A: Analysis

Gegeben ist für jede reelle Zahl  $t \neq 0$  die Funktion  $f_t(x)$  durch

$$f_t(x) = t \cdot \frac{x^2}{x^2 - 2t}$$

- a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich in Abhängigkeit von  $t$ .

Zeigen Sie:  $f_t''(x) = 4t^2 \cdot \frac{3x^2 + 2t}{(x^2 - 2t)^3}$  4 BE

- b) Geben Sie von der Funktion  $f_2(x)$  das Monotonieverhalten an. Untersuchen Sie  $f_t(x)$  auf Symmetrie, gemeinsame Punkte mit der  $x$ -Achse, Asymptoten, Hoch-, Tief- und Wendepunkte.

12 BE

- c) Es sei  $u > 2$ . Die Punkte  $A(0 \mid 0)$ ,  $B(u \mid 0)$ ,  $C(u \mid f_2(u))$  und  $D(0 \mid 4)$  sind Eckpunkte eines Trapezes. Bestimmen Sie  $u$ , sodass der Flächeninhalt des Trapezes ein Extremum annimmt, und geben Sie die Art des Extremum an.

3 BE

- d) Zeigen Sie dass  $F(x) = 2 \cdot (x + \ln|x-2| - \ln|x+2|)$  eine Stammfunktion von  $f_2(x)$  ist.

Das Bild von  $f_2(x)$  und die Gerade mit der Gleichung  $y = -\frac{2}{3}$

schließen eine Fläche ein.

Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten deren Inhalt. 6 BE

## Teil B: Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  ist für jeden Parameterwert  $a \in \mathbb{R}$  durch  $E_a: 2x - a \cdot y + 4z = 0$  und  $H_a: y = a$  je eine Ebene festgelegt.

- a) Welche Ebene  $E_a$  enthält den Punkt  $Q(-3, 2 \mid -4 \mid 5, 6)$ ? 1 BE
- b) Zeigen Sie, dass sich *alle* Ebenen  $E_a$  in einer gemeinsamen Gerade  $s$  schneiden, und geben Sie eine Gleichung von  $s$  in Parameterform an. 2 BE
- c) Beschreiben Sie, welche besondere Lage die Ebenen  $H_a$  im Koordinatensystem haben. 1 BE
- d) Für welches  $a$  ist  $E_a$  orthogonal zu  $H_a$ ? 2 BE
- e) Berechnen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden  $g_a$  von  $E_a$  und  $H_a$ . 1 BE

$$\text{Mögliches Ergebnis: } g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2} \\ 2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Welchen Winkel schließt die Gerade  $g_a$  mit der Ebene  $x = 0$  ein?  
2 BE

Woran können Sie erkennen, dass alle Geraden keine Ebene bilden?  
1 BE

- f) Durch  $g_{a=0}$  und die  $y$ -Achse wird eine Ebene  $\varepsilon$  eindeutig festgelegt.  
Zeigen Sie, dass  $E_{a=0}$  und  $\varepsilon$  identisch sind. 2 BE
- g) Berechnen Sie den Schnittpunkt  $S_a$  auf der Geraden  $g_a$  mit der  $y$ - $z$ -Ebene.  
Zeigen Sie, dass die Punkte  $S_a$  auf einer Parabel in der  $y$ - $z$ -Ebene liegen. 3 BE

## Teil C: Stochastik

In den vergangenen Jahren nahmen immer mehr sächsische Schüler an dem jeweils im März stattfindenden "Känguru-Wettbewerb" teil. In diesem mathematischen Wettbewerb werden 30 Aufgaben mit jeweils 5 Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine richtig ist, gestellt.

Die Teilnehmer einer Arbeitsgemeinschaft (AG) Mathematik trainieren anhand von Aufgabenserien früherer Jahre für den neuen Wettbewerb. Dabei legt der AG-Leiter fest, dass bei jeder Aufgabe genau eine Antwortmöglichkeit angekreuzt werden muss.

- a) Geben Sie an, wie viele verschiedene Möglichkeiten der Anordnung der Kreuze auf dem Antwortzettel es gibt. 1 BE
- b) Einige AG-Teilnehmer diskutieren ihre Erfolgsaussichten, wenn sie alle Kreuze zufällig setzen würden.  
Ermitteln Sie für diesen Fall die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:  
A: Genau zehn Antworten sind richtig.  
B: Mehr als 3, aber höchstens 8 Antworten sind richtig.  
C: Mehr Antworten sind richtig, als man erwarten kann. 5 BE
- c) Die Aufgaben sind in drei Gruppen zu je 10 Aufgaben eingeteilt. AG-Teilnehmerin Simone weiß aus Erfahrung, dass sie eine Aufgabe der Aufgabengruppe 1 (Aufgabennummern 1 bis 10) mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 %, eine Aufgabe der Gruppe 2 (Aufgabennummern 11 bis 20) mit 70 % und eine Aufgabe der Gruppe 3 (Aufgabennummern 21 bis 30) immerhin noch mit 65 % richtig löst.  
Das Ankreuzen der Antworten erfolgt in der Reihenfolge der gestellten Aufgaben.  
Ermitteln Sie für Simone die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:  
D: Simone kreuzt bei allen Aufgaben die richtige Lösung an.  
E: Simone begeht ihren ersten Fehler in der Aufgabe mit der Nummer 12.  
F: Simone kreuzt bei allen Aufgaben der Gruppe 2 die richtige Lösung an.  
G: Simone löst alle Aufgaben der Gruppen 1 und 2 richtig und genau zwei Aufgaben der Gruppe 3 falsch. 4 BE

## Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie **genau eine** der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

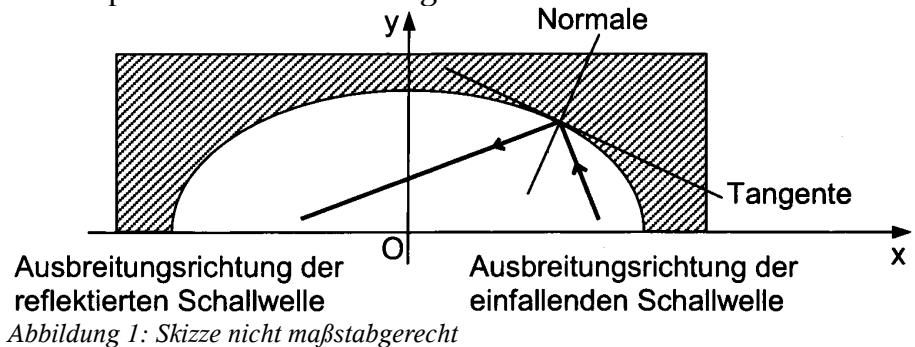
### Wahlaufgabe 1

Flüstergewölbe, z. B. im Capitol in Washington oder in der Londoner St. Paul's Cathedral, sind Meisterleistungen der Architektur.

Die Abbildung zeigt den zur Ordinatenachse symmetrischen Querschnitt eines Gewölbes, dessen eine Begrenzungslinie durch den Graphen der Funktion  $f$  mit

$$f(x) = \sqrt{-\frac{9}{25}x^2 + 81} \quad (x \in \mathbb{R}; -15,0 \leq x \leq 15,0)$$

in einem ebenen kartesischen Koordinatensystem beschrieben werden kann (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter). Schallwellen werden entsprechend der Abbildung an der Gewölbedecke reflektiert.



- a) Das Deckengewölbe besitzt eine kreisförmige Grundfläche, wobei jeder senkrechte Schnitt durch den Mittelpunkt dieser Grundfläche eine Schnittfläche erzeugt, die zu der Fläche aus obiger Abbildung kongruent ist.  
Berechnen Sie einen Näherungswert für das Volumen des Gewölbes. 2 BE

- b) Weisen Sie nach, dass die Gerade mit der Gleichung

$$y = -\frac{\frac{9}{25}x_0}{\sqrt{-\frac{9}{25}x_0^2 + 81}} \cdot x + \frac{81}{\sqrt{-\frac{9}{25}x_0^2 + 81}}$$

$$(x \in \mathbb{R}; x_0 \in \mathbb{R}; -15,0 \leq x_0 \leq 15,0)$$

Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $P_0(x_0 | f(x_0))$  ist. 2 BE

- c) Eine vom Punkt  $A(11,0; 0,0)$  ausgehende Schallwelle wird an der Decke im Punkt  $B(9,0 | f(9,0))$  reflektiert.  
Ermitteln Sie einen Näherungswert für die Abszisse des Punktes, in dem die reflektierte Welle die Abszissenachse trifft. 4 BE
- d) Eine vom Punkt  $D(4,8 | 0,0)$  ausgehende Schallwelle soll an der Decke in sich selbst reflektiert werden.  
Ermitteln Sie einen Näherungswert für die Stelle, an der die Reflexion stattfindet. 2 BE

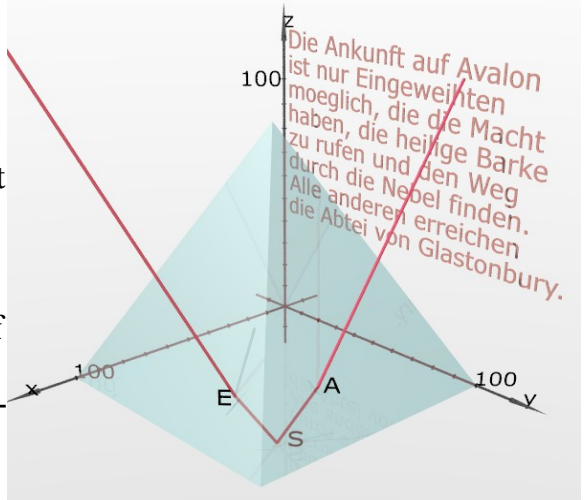
## Wahlaufgabe 2

### Lara und der Gefangene von Avalon

Auf der Suche nach dem Heiligen Gral muss Lara den gefangenen König Artus finden. In der Kammer des Schreckens wird sie einen weiteren Teil des Rätsels lösen. Einst war die Kammer mit Wasser gefüllt, aber das ist sie schon lange nicht mehr und wird es auch nie wieder sein.

Nun muss Lara aus den technischen Angaben die gesuchten Informationen rekonstruieren:

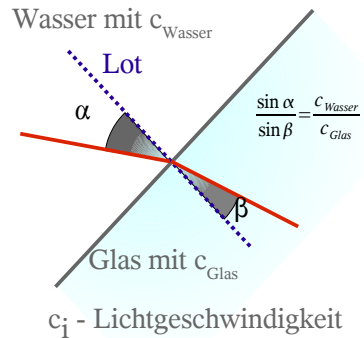
- In die Kammer<sup>1</sup> fällt stark gebündeltes Licht vom Punkt  $L(167 \mid 0 \mid 230)$  mit Richtung  $\vec{r} = \begin{pmatrix} -11 \\ 11 \\ -30 \end{pmatrix}$  auf eine quadratische Pyramide aus Glas.



- Die Pyramide hat eine Kantenlänge von 100, *Abbildung 2: fast maßstäblich* ist gerade und hat eine Höhe von 100. Die Grundfläche ist verspiegelt und hat achsenparallele Kanten.
- Der Strahl verlief einst im Wasser nach dem Brechungsgesetz.

<sup>1</sup> Der Einfachheit halber wird das Koordinatensystem wie in Abbildung 2 zu sehen ist gelegt.

- Alle Bezeichnungen zum Brechungsgesetz werden wie in Zeichnung 1 angenommen.
- Das Brechungsgesetz besagt auch, dass einfallender, gebrochener Strahl und Lot in einer Ebene verlaufen.
- Die Lichtgeschwindigkeiten sind im Wasser  
 $c_{\text{Wasser}} = 224\,900\,569 \text{ m/s}$   
 und im Glas  
 $c_{\text{Glas}} = 187\,378\,286 \text{ m/s}$ .



Zeichnung 1: Brechungsgesetz

- Zeigen Sie, dass das einfallende Licht eine der Flächen der Pyramide trifft und geben Sie den Eintrittspunkt E an. 4 BE
- Berechnen Sie die Lage des Spiegelpunktes S. 3 BE  
zur Kontrolle<sup>2</sup>:  $S_{\approx}(79 \mid 83 \mid 0)$
- Berechnen Sie die Lage des Austrittspunktes A. 3 BE

2 Die Koordinaten von S werden nur näherungsweise gegeben. Sie benötigen eine höhere Genauigkeit.

# Lösungsvorschläge

## Teil A

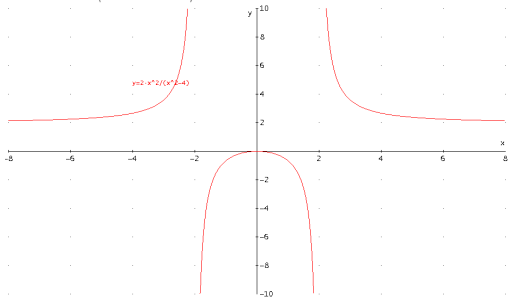
a)  $D_{f_t}: x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x^2 = 2t\}$  und  $f'_t(x) = -\frac{4t^2 x}{(x^2 - 2t)^2}$

b) Monotonie:  
streng monoton steigend für

1.  $x < -2$
2.  $-2 < x < 0$

streng monoton fallend für

3.  $0 < x < 2$
4.  $2 < x$



gemeinsame Punkte mit x-Achse:  $f(x_0) = 0 \rightarrow O(0 \mid 0)$

Asymptoten:  $y_{1/2} = x_{p/2}$  und  $y_3 = t$ ; wegen  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_t(x) = t$

Extrema:  $f'_t(x_E) = 0 \Rightarrow E(0 \mid 0)$  mit  $f''_t(0) = -1 \Rightarrow E_{\max}$

Wendepunkte:  $f''_t(x_W) = 0 \Rightarrow W_{1/2} \left( \pm \sqrt{-\frac{2}{3}t} \mid \frac{t}{4} \right)$  existiert nur für  $t \leq 0$ ,

wegen  $f'''_t(x_W) = -\frac{27}{64} \sqrt{-\frac{6}{t}} < 0$

c)  $A(u) = \frac{1}{2} (4 + f_2(x)) \cdot u \rightarrow Y2$

z. B. weiter mit GTR:

`solve(nDerive(Y2, X, X), X, 3) → 2.8284`

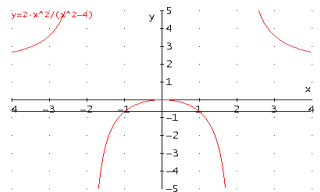
`nDerive(nDerive(Y2, X, X), X, Ans) → 7.07`

⇒ es liegt ein minimaler Flächeninhalt vor

d)  $F'(x) = f_2(x)$

$$A = 2 \cdot \int_0^{x_s} \left( f_2(x) - \left( -\frac{2}{3} \right) \right) dx \text{ mit}$$

$$f_2(x_s) = -\frac{2}{3} \Rightarrow x_s = 1 \text{ und } A = 16/3 - 4 \ln 3$$



## Teil B

a)  $a = -4$

b)  $s = E_a \cap E_b \ (a \neq b) \Rightarrow s: y = 0 \wedge x + 2z = 0$  bzw.  $s: \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c)  $H_a$  sind parallel zur x-z-Koordinatenebene im Abstand a zum Koordinatenursprung

d) Verwende Normalenvektoren der Ebenen:  $\vec{n}_{E_a} \cdot \vec{n}_{H_a} = 0 \Rightarrow a = 0$

e)  $g_a = E_a \cap H_a$  und Umformung

F:  $x = 0 \Rightarrow \sphericalangle(F, g_a) \approx 1,10715 = 63,435^\circ$

keine Ebene, weil beispielsweise die Gerade  $g_a$  als Ebene aufgefasst

$$g_a: \vec{x} = a \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ einer der Richtungsvektoren von } a \text{ abhängt.}$$

f) z. B.: Normalenvektor  $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  und Richtungsvektoren  $\vec{r}$

$$\vec{r}_{g_0} \cdot \vec{n}_0 = 0 \text{ und } \vec{r}_{y\text{-Achse}} \cdot \vec{n}_0 = 0 \text{ und } O \in E_0, O \in g_0$$

g)  $S_a(0 | a | a^2/4) \Rightarrow x = 0 \wedge z = y^2/4$  ist eine Parabel

## Teil C

a) Anzahl aller Möglichkeiten:  $5^{30}$

b) Charakterisierung der Zufallsgröße:

Binomialverteilung mit  $n = 30$  und  $p = .2$

$P(A) \approx 0,0355$

$P(B) \approx 0,7486$

Erwartungswert: 6

$P(C) \approx 0,3930$

c)  $P(D) \approx 0,0001$

$P(E) \approx 0,0732$

$P(F) \approx 0,0282$

d)  $P(G) \approx 0,0017$

# Wahlaufgabe 1

- a) Ansatz: z. B.: Berechnen der inversen Funktion<sup>3</sup> und Integration

$$f^{-1}(x) = \frac{5}{3} \sqrt{81 - x^2} \Rightarrow$$

$$V = \pi \cdot \int_0^9 (f^{-1}(x))^2 dx = 1350 \cdot \pi$$

Volumen:  $V \approx 4\,240 \text{ m}^3$

- b) Ansatz für Nachweis:  
mit  $f'(x_0) = m$  und  $f(x_0) = n$   
erste Ableitung  
Nachweis für Anstieg

- c) Anstieg der Geraden durch A und B  
Tangentenanstieg  
Ansatz für Abszisse des Punktes  
Abszisse des Punktes:  
 $x \approx -5,7$   
Beispielrechnung:  
Anwendung Sinussatz – Abbildung 4

$\tan \alpha = 3.6; \tan \beta = 20/9$   
(Normale)

$\Rightarrow \gamma \approx 39,75^\circ$  und  $\delta \approx 26,02^\circ \Rightarrow \Delta x \approx 16,7489$

- d) Suche Anstieg der Normale an den Graphen von  $f$  in  $(a | f(a))$  durch D

Normale an der Stelle a:  $y = \frac{-1}{f'(a)} \cdot x + \left( f(a) + \frac{1}{f'(a)} \cdot a \right) = \frac{a-x}{f'(a)} + f(a)$

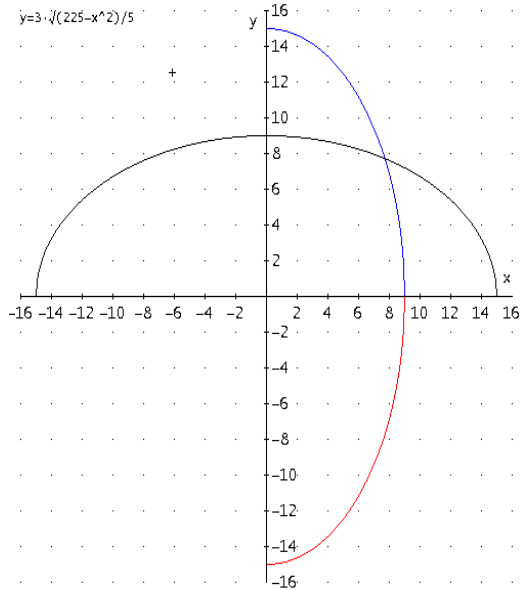


Abbildung 3: Funktion und Inverse

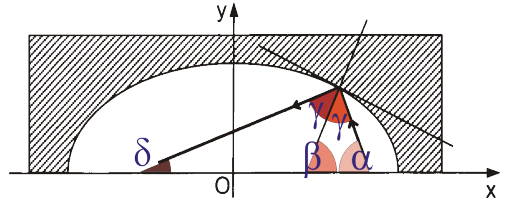


Abbildung 4: Bezeichnung der Winkel

3 Durch Vertauschen der x- und y-Achse wird aus  $y \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$  und nicht zu vergessen, die Integrationsgrenzen müssen angepasst werden. O. b. d. A. beschränke ich  $y \geq 0 \wedge x \geq 0$ .

Normale durch D an der Stelle a:  $0 = \frac{a-4.8}{f'(a)} + f(a)$

mit GTR:  $Y1 = f(x)$ ;

$\text{solve}((X-4.8)/\text{nDerive}(Y1, X, X) + Y1, X, 6) \rightarrow a = 7.5$

## Wahlaufgabe 2

Wesentliche Eckpunkte der Pyramide:

$P_1(100|0|0)$ ,  $P_2(100|100|0)$ ,  $P_3(0|100|0)$ ,  $P_S(50|50|100)$

a)  $E = \varepsilon_{P_1P_2P_3} \cap g_{L, \vec{r}}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OP_1} + s \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + t \cdot \overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{OL} + u \cdot \vec{r} \quad (s, t, u \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow s = 0,67, t = 0,2 \text{ und } u = 7$$

wegen  $0 \leq s, t \leq 1$  liegt  $E(90|77|20)$  zunächst im Parallelogramm

$P_1P_2P^*P_S$

mit  $P^*(50|150|100)$ ; um nachzuweisen, dass E im Dreieck  $P_1P_2P_S$

liegt, kann nun z. B. die Berechnung der Abstände mit GTR dienen:

$$d(P_1, E) = \sqrt{6429} < d(P_1, g_{P_2P_S}) = \sqrt{8333} \text{ damit ist E in der Fläche } P_1P_2P_S$$

b) Die Richtung  $\vec{p}$  von Punkt E nach Spiegelpunkt S ergibt sich aus ei-

ner Linearkombination:  $\vec{n} + v \cdot \vec{r} = \vec{p} \quad (v \in \mathbb{R})$ . Dabei ist  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  der

Normalenvektor der Ebene  $\varepsilon_{P_1P_2P_3}$ .

Aus dem Brechungsgesetz folgt der Winkel  $\beta = 0,64915 \approx 37,2^\circ$ .

Weiterhin folgt:

$$\cos \beta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}|} \Rightarrow \cos \beta = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{n} + v \cdot \vec{r})|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n} + v \cdot \vec{r}|} \Rightarrow$$

$$0,7966 = \frac{5 + v \cdot 52}{\sqrt{(2+11v)^2 + (-11v)^2 + (1+30v)^2}}$$

weiter mit GTR:  $v \approx 0,24693$  und  $\vec{p} \approx \begin{pmatrix} 4,7163 \\ -2,7163 \\ 8,4080 \end{pmatrix}$

$$S = g_{E, \vec{p}} \cap \varepsilon_{P_1P_2P_3} \Rightarrow S(78,7815 | 83,4612 | 0)$$

c) Spiegelung des Richtungsvektors:  $\vec{p}^* \approx \begin{pmatrix} 4,7163 \\ -2,7163 \\ -8,4080 \end{pmatrix}$  und

$$A = g_{S, \vec{p}^*} \cap \varepsilon_{P_2, P_3, P_5} \Rightarrow A(67,51 \mid 89,95 \mid 20,09)$$

Anmerkung:  $S_{\approx}$  würde zu  $A_{\approx}(67,31 \mid 89,38 \mid 21,25)$  führen